

COMPLEMENTI

DI

ALGEBRA E GEOMETRIA

AD USO DEI LICEI MODERNI (II E III CLASSE)

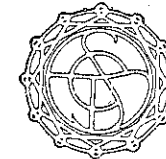
DI

GIUSEPPE VERONESE

TRATTATI CON LA COLLABORAZIONE

DI

PAOLO GAZZANIGA



PADOVA — FRATELLI DRUCKER — PADOVA

LIBRAI-EDITORI

1915

Proprietà letteraria riservata a norma di legge.

PADOVA - PREM. SOC. COOP. TIPOGRAFICA

PREFAZIONE

I programmi di matematica dei ginnasi e del I corso dei licei moderni sono gli stessi, così pel contenuto come per il metodo, di quelli dei ginnasi e del I corso dei licei classici.

Essi differiscono nella II e III classe liceale, non tanto per la parte rimanente della geometria e dell'algebra, nel contenuto delle quali furono introdotte solamente alcune semplificazioni con maggiore riguardo alle pratiche applicazioni, quanto per i concetti, o per i cenni di altre teorie, aggiunti, come quelli di coordinate, di funzione, di rappresentazione grafica, di limite, di derivata e di integrale definito.

Egli è per ciò che insieme col prof. P. GAZZANIGA ho creduto opportuno anzitutto di rendere la Parte II dei miei Elementi di Geometria, più conforme al contenuto del programma della II classe del liceo moderno con un' apposita edizione, la quale fu pubblicata alla fine dello scorso anno. In questa edizione ho mantenuto però lo stesso metodo della prima (comune ad ambedue i ginnasi superiori e alla I classe dei due licei) perché mi sembra non sia buona norma didattica quella di cambiare metodo, senza necessità, nel settimo anno di studio della stessa materia scelta metodicamente negli anni precedenti; tanto più che spetta all'esperienza il dire se effettivamente la parte nuova dei programmi dovrà essere modificata, e in qual modo.

Con questi Complementi di Algebra e di Geometria non abbiamo creduto dunque di fare un unico trattato per tutta la matematica della II e III classe del liceo moderno, ma soltanto un libro che serva a completare gl' insegnamenti di geometria, di algebra elementare e di trigonometria, e ciò non solo per ragioni didattiche ma anche per ragioni di economia, raccomandate ~~anche~~ dal Ministero nella scelta dei libri di testo.

Con la collaborazione del prof. GAZZANIGA ho per ciò trattata in questi Complementi, come lo dice il nome, soltanto la parte nuova dei programmi.

Essi, sono informati al medesimo principio degli Elementi, e cioè noi ricorriamo bensì largamente all'osservazione per i nuovi concetti fondamentali, ma cerchiamo di stabilirli poi indipendentemente da essa e in modo sufficientemente esatto (anche se non sempre lo possiamo fare in generale, ma spesso soltanto per via di esempi) e tuttavia senza incorrere in errori, ciò che non è difficile data una trattazione come questa elementare e frammentaria.

Inoltre i nuovi concetti sono da noi svolti in questo libro con metodo geometrico, e quindi spesso appoggiandoci alla rappresentazione grafica, e con esempiolti dalla meccanica e dalla fisica, come giustamente consigliano le istruzioni che accompagnano i programmi, perchè questa è la via più facile per far entrare nella mente degli alunni certi concetti per loro natura delicati.

Sebbene l'indice del libro non corrisponda sempre letteralmente alla parte nuova del programma, esso ne contiene però tutto lo svolgimento; anzi abbiamo introdotto fino dal paragrafo delle funzioni lineari il concetto di coefficiente angolare o di pendenza della retta e quindi in generale di rapporto incrementale di una funzione, anche perchè esso ci serve poi trattando delle funzioni quadratiche e della forma $\frac{a}{x}$ per costruire la tangente in un punto della loro rappresentazione grafica, prima di trattare del concetto di limite o di derivata. Così anche se i programmi e le istruzioni non ne parlano, abbiamo trovata la derivata di una funzione intera di grado n , quelle del seno, del coseno e della tangente di un angolo, utili nella soluzione di qualche problema e necessarie per dimostrare che le curve dei seni e delle tangenti, contemplate dal programma, sono curve intuitive, curve cioè che non solo rappresentano funzioni continue (salvo punti speciali) ma tali che ammettono derivata, e questa è pure una funzione continua.

Mentre con gli Elementi ritengo di avere tracciato un nuovo indirizzo scientifico e didattico per l'insegnamento della Geometria.

rispetto ai classici trattati di Euclide e di Legendre, per mezzo di principi non prima adottati, (anche se della priorità di questo indirizzo non si è tenuto conto sufficiente in qualche recente pubblicazione italiana intorno ai libri di testo di geometria ad uso delle nostre scuole secondarie) (*), con questi Complementi invece ritengo di avere sufficientemente completata nei riguardi dell'insegnamento del liceo moderno l'opera degli Elementi stessi. (**)

Questa edizione è un primo saggio e io sarò grato a quegli insegnanti che vorranno suggerire a me o al prof. GAZZANIGA le modificazioni o aggiunte che possano migliorarla.

Vi sono, è vero, alcuni trattati tedeschi, francesi e qualcuno inglese, nei quali sono svolti gli argomenti nuovi dei programmi per il liceo moderno: ma per motivi diversi noi non potevamo prenderli a guida, perchè essi non si prestano nè per il contenuto e tanto meno per il metodo all'insegnamento nelle nostre scuole.

E a proposito di una certa tendenza che vi è in Italia di imitare soverchiamente a danno della nostra indipendenza quanto si fa al di fuori debbo ricordare che poco dopo il 1866, in seguito alla invasione nelle nostre scuole classiche di libri stranieri, per opera di illustri nostri matematici, fu prescritto in esse il trattato di Euclide, non tanto per il testo, quanto per il metodo. Noi dobbiamo bensì approfittare dei progressi che si compiono fuori d'Italia, ma senza rinunciare, anche nell'insegnamento della matematica (in cui fummo un giorno maestri e che anche oggi non siamo da meno certo degli altri) a ciò che è il risultato delle nostre tradizioni e delle nostre qualità nazionali.

Padova, aprile 1915.

G. VERONESE

(*) Di questo indirizzo in confronto di altri mi occupai nell'Appendice ai miei Elementi ad uso degli insegnanti, della quale fu fatta un'edizione incompleta (ed ormai esaurita) nel 1898 e di cui ho promesso già la seconda edizione, che spero potrà essere pronta nel prossimo anno.

(**) Questi Complementi possono essere adottati nella II e III classe del liceo moderno anche se nei corsi precedenti sono stati usati altri testi di geometria.

ERRATA-CORRIGE

	Errata	Corrige
Pag. 18 riga 7	quadratura	Quadratura
» 19 » 21	metro	decimetro
» 25 » 32	$< f(c+k)$	$> f(c+k)$
» » » 34	$> f(c+k)$	$< f(c+k)$
» 26 » 10	$< f(5+k)$	$> f(5+k)$
» 51 » 28	per $x=0$	—
» 65 » 13	$\lim \frac{1}{x} \lim 1 = 1$	$\lim 1 = 1$
» 67 » 21	vicinissime tra loro	vicinissimi tra loro
» » » 27	equilatero	equilatera
» 74 » 23	ax_n	ax^n
» 76 » 6	solo $y = ax \pm \frac{m}{n}$	per $y = ax \pm \frac{m}{n}$
» 78 » 5	$2x^2 - 5x^3 \quad \frac{x^3+x}{5}$	$2x^2 - 5x^3 \quad \frac{x^3+x}{5}$
» 86 » 10	dato il	il
» 99 » 9	e	è

Coordinata di un punto sulla retta.

1. — Dalla teoria della misura delle grandezze (Elementi di Geometria, II^a Parte, licei moderni) sappiamo che, dato un segmento AB considerato soltanto nella sua lunghezza, senza cioè tener conto del suo verso, e scelto ad arbitrio un altro segmento CD come **unità di misura**, riesce individuato un numero reale e positivo m , che esprime l'operazione o il sistema di operazioni (divisioni successive in parti eguali e somme di questi parti) con le quali da CD si ottiene un segmento eguale ad AB ; numero che dicesi **misura di AB rispetto a CD** .

Ad es. se AB è la somma di tre segmenti eguali a CD , la misura di AB rispetto a CD è il numero: 3; se AB è la somma di quattro segmenti eguali alla quinta parte aliquota di CD , la misura di AB è il numero: $\frac{4}{5}$; e se infine AB è un segmento che risulta sempre compreso fra: $1(CD)$ e $2(CD)$, fra: $\frac{14}{10}(CD)$ e $\frac{15}{10}(CD)$, fra: $\frac{141}{100}(CD)$ e $\frac{142}{100}(CD)$, ricordando che le due classi di numeri razionali:

$$\begin{array}{l} 1 \quad 1,4 \quad 1,41 \quad 1,414, \dots \\ 2 \quad 1,5 \quad 1,42 \quad 1,415, \dots \end{array}$$

individuano il numero irrazionale: $\sqrt{2}$, sarà a dirsi $\sqrt{2}$ la misura di AB rispetto a CD .

Invece di dire che m è la misura di AB rispetto a CD , si suole anche dire, come sappiamo, che m è il **rapporto fra AB e CD** ; sicchè il vocabolo: *rapporto*, di due segmenti, antecedente e conseguente, è sinonimo del

vocabolo: *misura*, del segmento antecedente, quando il segmento conseguente sia preso come *unità di misura*. E ciò si esprime sia scrivendo:

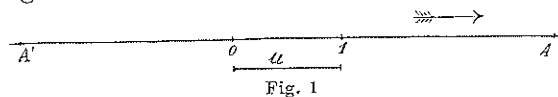
$$AB = m(CD) \quad (\text{leggere: } AB \text{ è } m \text{ volte } CD)$$

che: $\frac{AB}{CD} = m$ (leggere: il rapporto fra AB e CD è m).

E va pure ricordato qui che il numero m è **razionale**, allora, e solo allor quando AB e CD sono **fra loro commensurabili**.

In ciò che segue dinoteremo con la lettera U (unità di misura) il segmento CD che assumiamo come termine conseguente di un rapporto; questo segmento unitario sarà nelle figure disegnato sempre a parte, e qualche volta sottinteso.

2. — Se sopra una data retta r si segna un punto O (che diremo **origine**) e si fissa il verso **positivo** dei suoi segmenti, che nella figura qui accanto è quello a



destra indicato da una freccia, allora per ogni altro punto A di essa alla destra di O viene ad essere individuato un numero reale e **positivo** m , (razionale o irrazionale) quello cioè che esprime la misura di OA rispetto ad U .

Se sulla retta r , A' è il punto opposto di A rispetto ad O , all'estremo A' del segmento OA' converremo di far corrispondere il numero reale **negativo**: $-m$, cioè l'opposto di m .

E se infine *conveniamo* ancora di far corrispondere al punto O il segno numerico: 0 (zero), allora potremo asserire che: *Ad ogni punto della retta r si può far corrispondere un unico e determinato numero reale, positivo, negativo o nullo, secondo che questo punto della retta si trova a destra, o alla sinistra dell'origine, oppure coincide con la origine stessa.*

Ma si può provare che, reciprocamente, ad ogni numero reale m positivo o negativo si può far corrispondere sulla retta r un unico punto A , e quindi un segmento OA ben determinato in lunghezza e in verso. Ad es. se: $m = 3$ il segmento OA è quello che si ottiene trasportando verso destra l'unità U tre volte consecutivamente;

se: $m = \frac{4}{5}$ il segmento OA è quello che si ottiene dividendo U in cinque parti eguali e di queste sommandone consecutivamente quattro verso destra; e se infine: $m = \sqrt{2}$, allora il segmento OA è il segmento ben determinato ed unico, alla destra di O , il quale è maggiore di tutti i segmenti, le cui misure rispetto ad U sono: 1, 1,4 1,41 1,414 1,4142... e minore di tutti i segmenti le cui misure rispetto ad U sono: 2, 1,5 1,42 1,415 1,4143, ... Al numero *zero* si fa corrispondere il punto origine O .

E ai numeri come: -3 , $-\frac{4}{5}$, $-\sqrt{2}$ corrispondono manifestamente i segmenti opposti, rispetto ad O , dei segmenti corrispondenti ai numeri positivi: 3, $\frac{4}{5}$, $\sqrt{2}$ (*).

(*) È noto che se POQ è un triangolo rettangolo i cui cateti sono in lunghezza eguali ad U , pel teor. di Pitagora, la ipotenusa PQ ha per misura il numero: $\sqrt{2}$; e se si tira QR perpendicolare a PQ ed eguale anch'essa all'unità U , si ha che il segmento PR ha per misura: $\sqrt{3}$; ecc.

Nel caso di: $m = \sqrt{2}$ la costruzione del segmento OA sulla retta r si può fare dunque anche più agevolmente e più esattamente trasportando da O verso destra un segmento eguale a PQ .

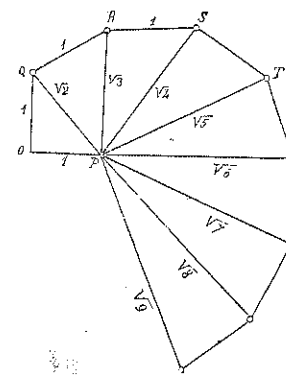


Fig. 2

Pertanto potremo dire che: *Ad ogni numero reale positivo, negativo o nullo, corrisponde sulla retta un determinato punto A, situato a destra, a sinistra, o coincidente con O, secondo che il numero stesso dato è positivo, negativo o lo zero.*

La corrispondenza fra i punti della retta e i numeri reali è dunque unica e reciproca, o, come si suol dire: biunivoca (corrispondenza: uno per uno).

3. — Assegnati sulla retta r l'origine O e il verso positivo (e quindi anche il negativo), e fissato un segmento arbitrario U , che si assume come unità di misura di tutti i segmenti di r , contati a partire da O , diremo: **ascissa**, od anche: **coordinata cartesiana di un dato punto P** qualsiasi della retta, il numero m reale pos. o neg. o zero che corrisponde al punto P . Con questa rappresentazione di numeri reali sulla retta r : allo zero corrisponde l'origine, e viceversa; a numeri positivi corrispondono punti a destra; a numeri negativi punti a sinistra di O , e reciprocamente. In particolare a numeri razionali corrispondono punti A tali, che i segmenti OA siano segmenti commensurabili con U , e reciprocamente; al segmento maggiore, considerato nel verso positivo, il numero reale positivo maggiore, e viceversa; al segmento somma di due parti considerate nello stesso verso, il numero somma dei due numeri corrispondenti ai segmenti addendi, ecc.

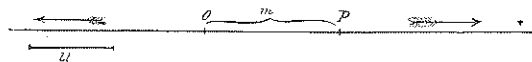


Fig. 3

Carattere fondamentale delle coordinate cartesiane è pertanto questo che: *dato un punto è determinata la sua coordinata ed una sola, e, inversamente, data la coordinata, è determinato il punto sulla retta, ed uno solo.*

Nell'Algebra, due numeri reali m ed m' si dicono fra

loro opposti, se la loro somma è zero, cioè se $m' = -m$. Se due segmenti come AB e BA differiscono solo per il verso, allora per analogia stabiliremo di esprimere ciò scrivendo: $BA = -AB$, oppure: $AB + BA = 0$; e diremo che: *invertendo gli estremi di un segmento, la sua misura, rispetto ad una certa unità, cambia di segno.*

È facile riconoscere che: Se A, B, C sono tre punti qualunque di una retta r , sussiste la seguente identità segmentaria:

$$AB + BC + CA = 0.$$

Infatti se B cade fra A e C , allora: $AC = AB + BC$ epperò: $AB + BC + CA = 0$. Se poi B non cade fra A e C , ma è A che cade fra B e C , allora si avrà:

$$BA + AC = BC, \text{ e quindi: } 0 = AB + BC + CA.$$

La stessa dimostrazione vale pel caso che C cada fra A e B .

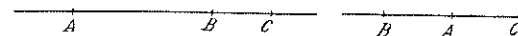


Fig. 4

Problema. — *Date le ascisse a, b di due punti A e B , determinare la misura del segmento AB .*

Siccome per la identità segmentaria:

$$OA + AB + BO = 0 \text{ si ha: } OA + AB = OB,$$

e perchè la misura di un segmento somma di due altri è la somma delle misure dei segmenti addendi, così, detta x la misura di AB si avrà: $a + x = b$, donde: $x = b - a$.



Fig. 5

Problema. — *Come mutano le ascisse dei punti di una retta, se in essa si muta l'origine, conservandone però il verso positivo?*

Sia O' la nuova origine, e sia d l'ascissa di O' ri-

petto all'antica origine O : poichè il verso positivo è rimasto come prima, detta x l'antica, x' la nuova ascissa di A , sarà: $d + x' = x$ da cui: $x' = x - d$.

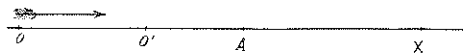


Fig. 6

Esempio - Se v è (in km) la velocità oraria di un punto mobile X il quale si muove di moto uniforme sulla retta r , ed A è il punto di partenza, la cui ascissa è: a ; e se t è (in ore) la durata del moto da A ad X , l'ascissa s (spazio percorso) di X sarà data da: $s = a + vt$.

Questa relazione serve, dati a , v , t a calcolare s ; serve anche a calcolare t dati s e a e v ; ecc.

Se il punto di partenza invece che A è l'origine stessa dei segmenti sulla retta, allora $a = 0$ e la relazione è la seguente: $s = vt$ (spazio = velocità moltiplicata pel tempo).

Coordinate cartesiane di un punto nel piano.

4. — Per fissare la posizione di un punto qualunque in un piano dato, il metodo più in uso è il seguente: Si tracciano due rette OX , OY (**assi coordinati**) incontrantisi in un punto O (**origine**) e delle quali la prima si dice: **asse delle ascisse** (o asse delle x) la seconda: **asse delle ordinate** (o asse delle y); si scelgono i versi positivi su ciascuno degli assi (nella figura qui sotto essi sono indicati da frecce), e si fissa a parte il **segmento unitario** U . Ad ogni punto P del piano viene così a corrispondere una determinata ed unica coppia di numeri reali, a e b , che sono le misure, rispetto ad U , dei segmenti OA , OB di incontro delle parallele condotte da P agli assi con gli assi stessi.

Reciprocamente, ad ogni coppia di numeri reali, dati in valore assoluto ed in segno, corrisponde un unico

punto P del piano: così se, per fissare le idee, è data la coppia dei numeri reali positivi: 3 e 5, a questa coppia corrisponde il punto che si ottiene facendo $OA = 3u$ e $OB = 5u$ e tirando da A e da B le parallele, rispettivamente all'asse OY e all'asse OX .

Ai punti della regione angolare $\angle O'B$ corrispondono coppie di numeri essenzialmente positivi (a, b); pei punti A dell'asse delle x è zero il numero b , e pei punti B dell'asse delle y è zero il numero a . Ai punti P' della regione angolare $\angle BOA'$ corrispondono coppie di numeri ($-a, b$) dei quali il primo soltanto è negativo. Ai punti P'' della regione $\angle A'OB'$ coppie di numeri essenzialmente negativi; e a quelli della regione $\angle AOB'$ coppie di numeri ($a, -b$).

Diconsi **coordinate cartesiane di un punto** P del piano i due numeri a e b , che sono individuati da P in valore ed in segno per mezzo delle misure dei segmenti delle parallele condotte da P all'asse delle x e all'asse delle y , e che determinano, quando siano dati in valore ed in segno, il punto P stesso. Sebbene le due coordinate a e b compariscano in questa definizione nello stesso modo per la determinazione del punto, tuttavia converremo di nominare e scrivere sempre come *prima* coordinata la misura di OA , ossia a , che si dice **l'ascissa**, e come *seconda*, la b , che si dice la **ordinata** del punto dato.

Anche per le coordinate cartesiane di un punto del piano si verifica una *corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e le coppie (a, b) di numeri reali*, variabili da punto a punto, ma ben determinati in valore ed in segno per ciascun punto dato; e cioè *dato un punto*

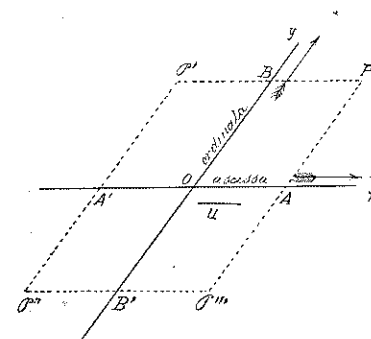


Fig. 7

sono determinate le sue coordinate, e date le coordinate è determinato il punto.

L'origine O è contrassegnata dalle coordinate: $(0,0)$.

In ciò che segue, per maggior semplicità, assumeremo

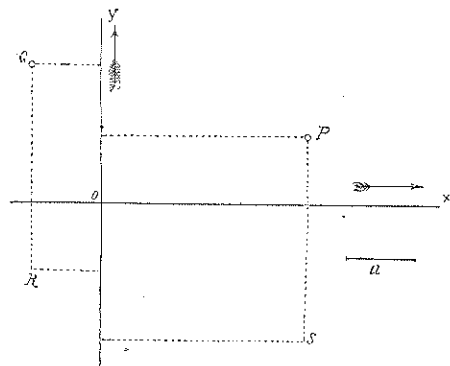


Fig. 8

come assi due rette OX, OY fra loro perpendicolari (assi ortogonali); in tal caso le coordinate cartesiane (a, b) di un punto P qualsiasi, si dicono **coordinate ortogonali**.

Ad es. i punti P, Q, R ed S della fig. 8 hanno per coordinate

ortog.: $(3, 1), (2, -1), (-1, -1), (3, -2)$ rispettivamente.

Date le coordinate di un punto P , la determinazione di P rispetto ai due assi OX, OY si chiama spesso la *rappresentazione grafica* del punto P ; e se noi costruiamo vari punti come P , con una determinata legge, l'insieme di codesti punti così ottenuti si dice la *rappresentazione grafica di questa legge*.

Oss. emp. — Questo procedimento è reso praticamente più semplice mediante l'uso di *carta quadrettata*, la quale, quando il quadrato ha per lato un millimetro dicesi *carta millimetrata*.

Nella carta quadrettata i vertici di ogni qua-

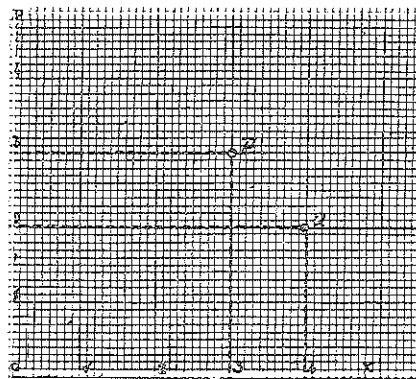


Fig. 9

drato hanno per coord. numeri interi pos. o negativi; ad es. il vertice P ha per coord. $(3,3)$, ed il vertice Q le coord. $(4,2)$.

Eserc. 1. — Determinare con la carta millimetrata le lunghezze dei lati e l'area del rettangolo $ABCD$, i cui vertici hanno per coordinate: $(9, 12), (9, -3), (-8, -3), (-8, 12)$.

Es. 2 — Segnare i punti di coordinate: $(3, 2), (-1, 2), (-1, -2)$ e calcolare l'area del triangolo che ha per vertice questi punti.

Es. 3 — Lo stesso pel triangolo di vertici: $(6, 4), (-2, 4), (-2, -4)$.

Es. 4 — Dati i quattro punti A, B, C, D di coord. $(2, 5), (1, -1), (-1, 5), (1, -2)$, determinare le coordinate dei punti in cui le congiungenti AB, BC, CD, DA incontrano gli assi.

Es. 5 — Se si ha l'equazione: $y = 3x + 2$ si trova che ai valori: $-2, -1, 0, 1, 2$ di x corrispondono rispettivamente per y i valori: $-4, -1, 2, 5, 8$. Verificare che i punti $(-2, -4), (-1, -1), (0, 2), (1, 5), (2, 8)$ sono tutti situati sulla stessa retta; e se si intercalano altri punti assumendo per x valori compresi fra i precedenti, si ottengono ancora punti della medesima retta.

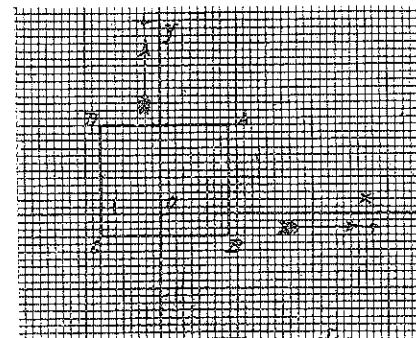


Fig. 10

5. — Problema. — Come mutano le coordinate di un punto del piano, se in esso si trasportano gli assi parallelamente a se stessi conservandone però il verso positivo? (traslazione).

Se $XOY, X'O'Y'$ sono due sistemi di assi coordinati fra loro paralleli, e se x ed y sono le coordinate di un punto generico P rispetto ai primi, x' ed y' quelle di P rispetto ai secondi; se inoltre a e b sono le coordinate di O' rispetto agli assi primitivi, dalla figura si ha che: $OA = OM + MA = OM + O'A'$ e quindi: $x = x' + a$.

Analogamente si trova che: $y = y' + b$.

Pertanto: $x' = x - a$, $y' = y - b$ (1). Segue da ciò

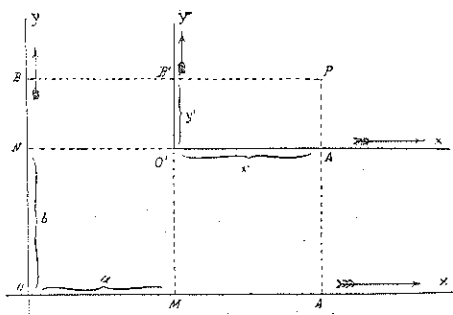


Fig. 11

che, date le coordinate di un punto P rispetto agli assi XOY , si troveranno quelle di P rispetto ai nuovi assi $X'O'Y'$ sottraendo dalle prime le coordinate omonime della nuova origine O' rispetto agli assi primitivi. Date invece le coordinate $x'y'$ di P si avranno le coordinate xy dello stesso punto aggiungendo alle prime rispettivamente a e b . Le formole (1) si dicono le *formole di trasformazione tra i due sistemi di assi fra loro paralleli*; esse sono equivalenti alle seguenti: $x = x' + a$, $y = y' + b$.

Eserc. 1 - Verificare che le formole (1) sussistono qualunque sia la regione angolare, nella quale si collochi la nuova origine O' .

Es. 2 - Quali sono le formole di trasformazione fra i due sistemi di assi paralleli, quando la nuova origine O' si colloca sull'asse delle x ; oppure sull'asse delle y ?

6. — Distanza di due punti.

Siano A e B i due punti, (x_1, y_1) (x_2, y_2) le loro coordinate, che nella figura sono rappresentate dai segmenti OA_1, AA_1 e OB_1, BB_1 ; e sia AQ parallela all'asse della x . Si vuol esprimere la distanza AB mediante le coordinate di A e di B . Dal triangolo rett. ABQ si ha, pel teor. di Pitagora:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2; \text{ ma } AQ = A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1 \text{ e } BQ = BB_1 - QB_1 = BB_1 - AA_1 = y_2 - y_1,$$

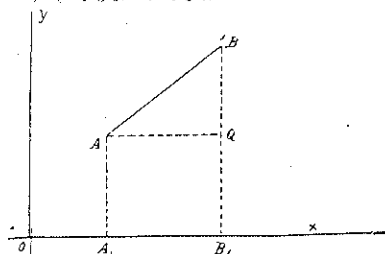


Fig. 12

epperò: $\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

od anche: $\overline{AB}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Se il punto A coincide con l'origine, allora $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, e scrivendo x rispettivamente y invece di x_2, y_2 , si ha che la distanza di O da B , che per brevità indicheremo con r , è data dalla eguaglianza:

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ da cui: } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Eserc. 1 - Calcolare la distanza dell'origine dal punto di coordinate $(3,2 - 2,3)$.

Es. 2 - Calcolare la distanza dei due punti: $(1,6 \ 2,3)$ $(2,3 \ 1,6)$.

Es. 3 - Verificare che i punti di coordinate: $(5 \ 0)$ $(4 \ 3)$ $(3 \ 4)$ $(0 \ 5)$ $(-3 \ 4)$ $(-4 \ 3)$ $(3 \ -4)$ giacciono tutti sopra un circolo che ha il centro nell'origine e il cui raggio è 5 unità.

Es. 4 - Verificare che i seguenti punti: $(11 \ 7)$ $(10 \ 10)$ $(9 \ 11)$ $(3 \ 11)$ $(2 \ 4)$ $(6 \ 2)$ distano di 5 unità dal punto $(6 \ 7)$.

Es. 5 - Calcolare la distanza dei due punti A e B di coordinate $(2,5 \ 1)$ $(-1 \ 1,5)$ avendo cura nella estrazione della radice quadrata di calcolarla a meno di $1/100$ per difetto; indi verificare il risultato con carta quadrettata di un cm. di lato.

Diagrammi.

7. Oss. emp. — Quando in un fenomeno i valori che assume una grandezza y sono determinati, secondo una data legge, dai valori di un'altra x (ad es. la pressione, in atmosfere, del vapore di una caldaia, e la temperatura di esso) allora considerando i valori di x come ascisse e quelli di y come ordinate di un sistema cartesiano (ortogonale) si ottiene un insieme di punti del piano, che sono rappresentati da queste coordinate.

Se però, per rendere più visibili le variazioni di y corrispondenti al variare di x , congiungiamo a due a due con tratti rettilinei gli estremi superiori di queste ordinate, considerate nel loro ordine naturale di successione, e siamo in qualche modo certi che le coordinate di un punto qualunque del tratto rettilineo sono l'una un valore della grandezza x e l'altra il corrispondente valore della y , allora avremo una **spezzata rettilinea**.

Se infine, la legge secondo cui i valori di y dipendono da quelli di x è tale che gli estremi di queste ordinate, anche se non li possiamo costruire tutti, si debbano succedere l'uno all'altro in guisa che la spezzata si possa empiricamente confondere con una linea curva, allora diremo di aver avuto una **curva**.

Il gruppo di punti, la spezzata, la porzione di curva si dicono il **diagramma** del fenomeno considerato. Nel primo caso si dice che il fenomeno è **discontinuo**, e nel secondo a **tratti continui**, nel terzo **continuo**. Però anche nel primo caso i punti consecutivi si uniscono con tratti rettilinei ugualmente, per avere una rappresentazione più chiara dell'ordine in cui si succedono i punti del diagramma. Ecco qualche esempio di ciascun caso nei tre numeri 8, 9, 10. che ora seguiranno.

8. Esempio 1 - I prezzi medi settimanali di una merce, nel corso di due mesi sono stati i seguenti:

Alla fine della I^a settimana: L. 2.50, alla fine della II^a: L. 2.40. indi: L. 2.75; L. 3; L. 2.50; L. 2.25; L. 2; L. 2.10.

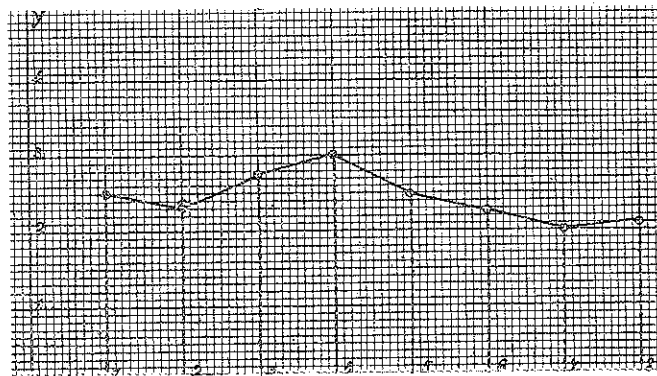


Fig. 13

Con la carta quadrettata, dopo di aver segnati gli assi OX , OY , se noi rappresentiamo sull'asse delle x le settimane (1 cm. per ogni settimana trascorsa) e sull'asse delle y i prezzi corrispondenti a ciascuna media settimanale (1 cent. per ogni lira) noi otteniamo un diagramma, composto di punti, tutti staccati gli uni dagli altri, che ci farà conoscere l'*andamento* dei prezzi della merce durante l'intero bimestre considerato, assai meglio che non si possa rilevare dal confronto di tutti i dati numerici suesposti. Il diagramma

è di quelli che abbiamo detti *discontinui*. Noi abbiamo congiunti gli estremi di due ordinate consecutive con tratti rettilinei, solo affinché l'andamento del fenomeno apparisse più manifesto; ma non possiamo dir nulla dei punti interni di questi segmenti, perchè non sappiamo p. es. se a metà della quarta settimana il prezzo della merce sia proprio quello che sarebbe dato dalla figura.

Esempio 2 - Dall'Annuario statistico italiano del 1912 (pag. 46) riportiamo qui il diagramma della mortalità, per causa di difterite, dal 1887 al 1910.

Sull'asse orizzontale sono rappresentati gli anni da segmenti eguali a due mm. e mezzo e sull'asse verticale sono rappresentati con segmenti di egual misura i numeri B che indicano per ciascun anno la mortalità sopra 100.000 abitanti. Ad es. nel 1910 vi è stata una mortalità per difterite di circa 14.15 individui su 100.000 abitanti, e nel 1887 è stata compresa tra 91.4 e 98.4 indivi-

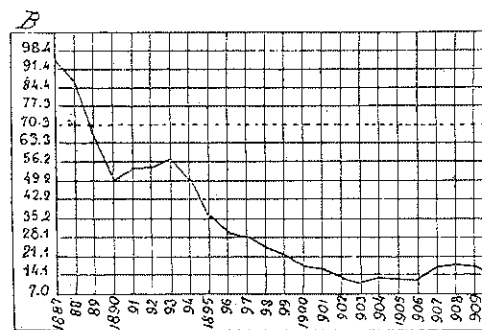


Fig. 14

9. Esempio 1 - Un treno diretto fra Venezia e Milano si muove con moto che da stazione a stazione si ritiene uniforme, e si ferma alle seguenti stazioni principali, come è indicato nella tabella qui aggiunta:

Part. da Venezia	ore 0.30	dist. Km.	9	arr. a Mestre	0.43
» Mestre	» 0.48	»	28	» Padova	1.24
» Padova	» 1.34	»	31	» Vicenza	2.10
» Vicenza	» 2.29	»	48	» Verona	3.20
» Verona	» 3.35	»	40	» Desenzano	4.23
» Desenzano	» 4.25	»	28	» Brescia	5
» Brescia	» 5.5	»	81	» Milano	6.20

Siccome da stazione a stazione il treno si muove di moto rettilineo uniforme, così possiamo tracciare il diagramma, assumendo come ascissa il tempo (6 mm. rappresentano 1 ora) e come ordinata la distanza percorsa (2 mm. rappresenta 10 km), e congiungere i

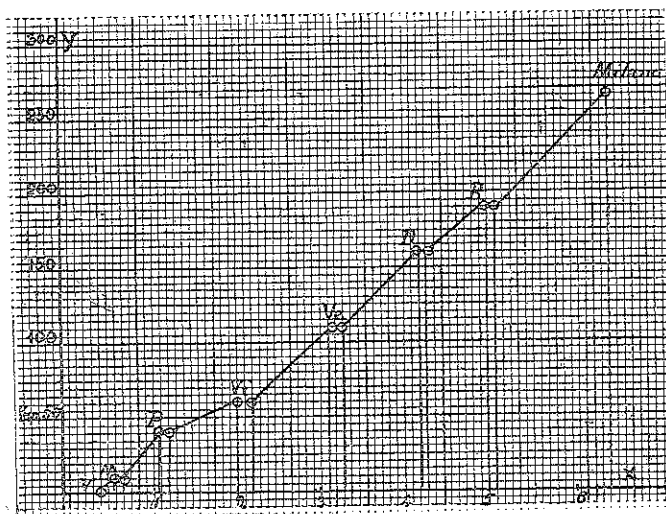


Fig. 15

vari punti con dei tratti rettilinei, potendosi ritenere che le distanze percorse, ossia le ordinate dall'una all'altra stazione siano proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.

Questo esempio corrisponde al diagramma a tratti continui.

Esempio 2 - Due ciclisti *A* e *B* corrono sulla stessa strada partendo contemporaneamente dallo stesso punto: *A* corre per 2 ore con la velocità di Km. 18 all'ora, si arresta per mezz'ora e poi continua correndo con la velocità oraria di 12 Km: *B* invece corre senza mai fermarsi con la velocità oraria di Km. 13.5. In qual punto *B* avrà incontrato *A*?

Lo studente sa benissimo risolvere questo problema con l'uso delle equazioni: noi vogliamo ottenere lo stesso risultato graficamente, assumendo come ascisse i tempi (nella scala di 1 cm. per ogni mezz'ora) e come ordinate il numero dei chilometri percorsi (in ragione di 10 km. per cm). Tracciando il diagramma degli spazi percorsi dai due velocipedisti, troveremo che il punto comune dei

due diagrammi è quello corrispondente alle ore 4 ed alla distanza di km. 54, come si troverebbe appunto risolvendo la equazione:

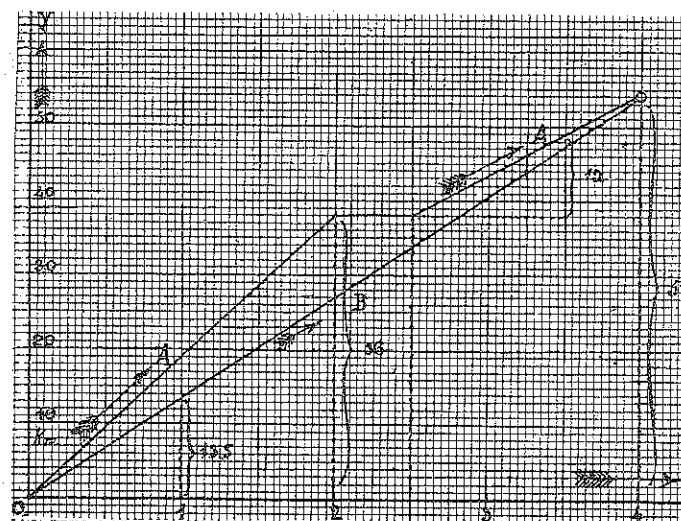


Fig. 16

$36 + 12x = 13,5(x + 2,5)$ ove x dinota in ore il tempo impiegato dal corriere *A* a percorrere il secondo tratto, dopo la sua fermata di mezz'ora.

10. — Consideriamo ora un fenomeno nel quale qualche grandezza, suscettibile di misura, vari in modo continuo al variare dei tempi, p. es. l'altezza della colonna di un termometro (centigrado) a mercurio. Queste variazioni della temperatura potranno essere rappresentate assumendo come asse delle x le durate e come asse della y le letture fatte sulla scala termometrica: il luogo delle estremità delle ordinate così segnate è un diagramma del terzo tipo, cioè *continuo*, perchè se anche noi non possiamo tracciare che un numero limitato di punti, siamo tuttavia certi che il luogo della estremità delle varie ordinate è continuo, cioè è una curva. È consigliabile però, anche quando le successive ordinate del diagramma siano prossime fra di loro, di congiungere i successivi estremi con tratti rettilinei e considerare la spezzata rettilinea così avuta non già essa stessa come la rappresentazione del fenomeno, perchè

questa ci è fornita da una curva a noi incognita, ma più che altro come una rappresentazione praticamente *approssimativa* di essa.

Esempio 1 - Supponiamo di aver questi dati sperimentali:

Leggendo su un termometro centigrado ad ogni quarto d'ora dalle 8 di sera alla mezzanotte la temperatura, si sono trovati questi risultati:

Ore	8	8 $\frac{1}{4}$	8 $\frac{1}{2}$	8 $\frac{3}{4}$	9	9 $\frac{1}{4}$	9 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{3}{4}$	10
Gradi	37	37,5	38	38,4	38,3	38,2	38,1	38	37,8
Ore	10 $\frac{1}{4}$	10 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{3}{4}$	11	11 $\frac{1}{4}$	11 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{3}{4}$	12	
Gradi	37,6	37,4	37,4	37,8	37,8	38	38	37,6	

Affinchè il disegno riesca in una piccola parte del foglio conveniamo di diminuire tutte le durate di 8 ore (con la scala di un cm. per ogni mezz'ora) e tutte le letture fatte sul termometro di 36 gradi (con la scala di 1 cm. per ogni mezzo grado); ciò che equivale a trasportare gli assi parallelamente a se stessi nella nuova origine (8;36): allora avremo il diagramma seguente:

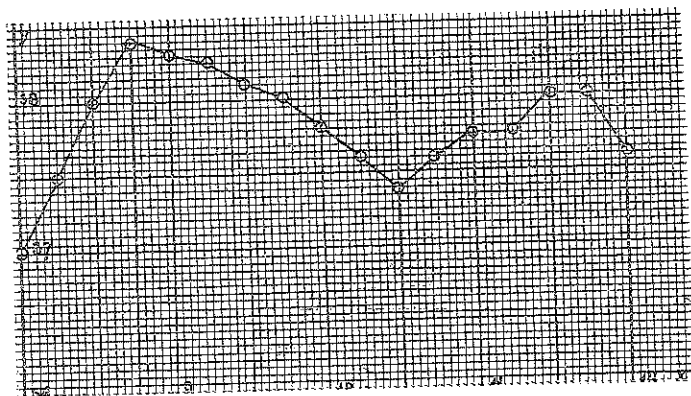


Fig. 17

Esempio 2 - Alla temperatura di 4 cent. una quantità di acqua occupa 1 dmc. esatto in un vaso di vetro a forma di un cilindro, sulle cui generatrici sono graduati i volumi in cmc. decimi e centesimi: sottoponendo quest'acqua a differenti temperature e notando i corrispondenti cambiamenti di volume si trovarono le seguenti variazioni di volume:

α : 0°, cmc. 0,13; 2° cmc. 0,03; 4° cmc. 0,00; 6° cmc. 0,03; 8° cmc. 0,11; 10° cmc. 0,25; 12° cmc. 0,45; 14° cmc. 0,70; 16° cmc.

0,99; 18° cmc. 1,35; ed a 20° cmc. 1,74; così che l'acqua che a 4° aveva il vol. di 1 dmc. a 20° ha il volume di dmc 1,00174. La nostra carta millimetrata sulla quale l'asse delle ascisse rappresenta le temperature (nella scala di 2 gradi cent. per ogni cm) e

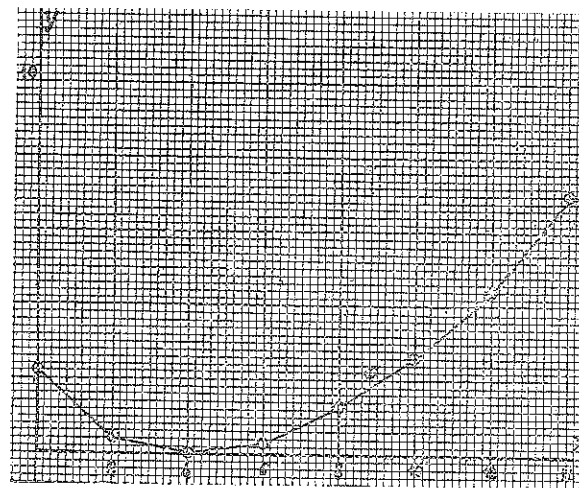


Fig. 18

quello delle ordinate rappresenta gli aumenti di volume (nella scala di 20 centesimi di cmc. per ogni cm.) ci dà il diagramma del fenomeno. Noi sappiamo a priori che il diagramma consta di una curva, perchè ad ogni variazione di temperatura corrisponde una variazione di volume e variando di pochissimo la temperatura è pure corrispondentemente piccolissima la variazione di volume: e sappiamo che se si aggiungessero altri dati sperimentali, determinando le variazioni di volume corrispondenti a temperature ad es. di 1°, 3°, 5°, ... si avrebbero quanti altri punti si vogliono del diagramma; ma i pochi che abbiamo costruito bastano a darci una idea praticamente approssimativa del diagramma stesso, anche congiungendo con tratti rettilinei i punti successivamente ottenuti.

Esempio 3 - Alcuni diagrammi, come quelli della temperatura, della pressione atmosferica, dell'umidità ecc. possono essere tracciati da appositi strumenti chiamati **strumenti registratori**, conosciuti e descritti nella Fisica. Un diagramma del terzo tipo, che può essere generato da uno di questi strumenti è quello della *marea*.

Si sa dalla idrografia che le maree non sono che le oscillazioni

periodiche della superficie del mare generate dall'attrazione esercitata su di esso dalla luna e dal sole ma, specialmente dalla luna la cui azione è prevalente.

Le ampiezze di marea, cioè i dislivelli fra un'alta marea e la bassa marea successiva variano e sono massimi nelle Sigizie (luna piena e luna nuova) perchè allora si uniscono le azioni della luna e del sole, e minime nelle quadrature (primo quarto ed ultimo quarto) perchè allora le azioni dei due astri sono in opposizione.

Le variazioni del livello del mare vengono appunto registrate dai *mareografi*. In questi strumenti un galleggiante che si alza e si abbassa seguendo i movimenti del livello del mare trasmette questi suoi spostamenti, in una scala di riduzione determinata, ad una penna scrivente, davanti alla quale si sposta un nastro di carta, con velocità uniforme impressa da un apparecchio d'orologeria. Si ottiene così sul foglio una curva (diagramma mareografico) i cui punti rappresentano le altezze del livello del mare, negli istanti ad essi corrispondenti e nella scala accennata, sopra una linea di base o di riferimento, pure tracciata dall'istrumento.

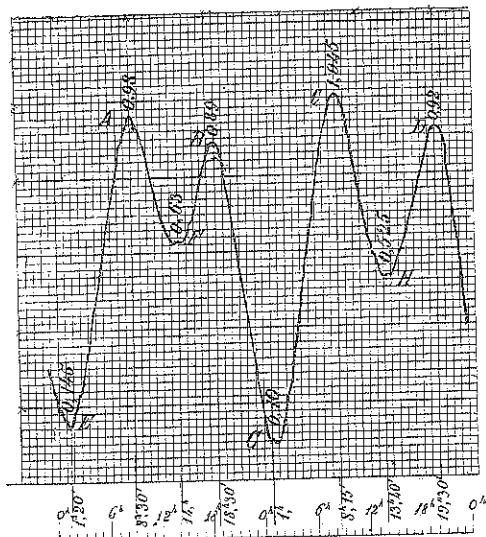


Fig. 19

Nel diagramma della figura 19 che si riferisce ad un periodo di due giorni dal 15 e 16 settembre 1914 la curva mareografica nella

laguna di Venezia presenta quattro massimi *A B C D* (alta marea) e quattro minimi *E F G H* (bassa marea).

SCALA DI RIDUZIONE DELLE ALTEZZE 1:20

ALTEZZE ORARIE DI MAREA SULLA LINEA DI RIFERIMENTO							
giorno 15 settembre				giorno 16 settembre			
0h	0.19	13h	0.65	0h	0.10	13h	0.53
1	0.15	14	0.63	1	0.14	14	0.56
2	0.195	15	0.675	2	0.285	15	0.645
3	0.285	16	0.74	3	0.475	16	0.735
4	0.44	17	0.835	4	0.64	17	0.83
5	0.60	18	0.89	5	0.835	18	0.90
6	0.745	19	0.885	6	0.955	19	0.91
7	0.88	20	0.795	7	1.045	20	0.80
8	0.96	21	0.655	8	1.02	21	0.635
9	0.965	22	0.475	9	0.89	22	0.45
10	0.92	23	0.295	10	0.755	23	0.265
11	0.86	24	0.145	11	0.63	24	0.17
12	0.71			12	0.54		

La linea di base è *a b*; sotto di essa è segnata la graduazione del tempo in ore. La scala delle altezze è di 1:20, in modo che mezzo centimetro rappresenta un metro, e mezzo millimetro un centimetro.

Dal diagramma stesso si fa poi lo spoglio orario, misurando, in corrispondenza di ogni ora la distanza fra il punto della curva mareografica, e la linea di base, e moltiplicando tale distanza per 20.

I risultati di questo spoglio sono riportati nella tabella posta sotto al diagramma stesso.

La curva mareografica, come si vede dal diagramma presenta delle irregolarità. Queste sono dovute ad oscillazioni accidentali del livello del mare, del tutto indipendenti dal fenomeno delle maree, causate dal vento o da movimenti sismici. Naturalmente i diagrammi delle maree variano col variare della località.

Grandezze variabili e funzioni.

11. Oss. emp. — Negli esempi precedenti abbiamo visto che vi sono grandezze che in un dato esperimento restano fisse, e grandezze y che sono determinate, secondo una data legge, da altre grandezze date x , e variano al variare di queste.

Così per es. se si stabilisce che fra la ordinata y e l'ascissa x dei vari punti del piano rappresentativo debba esser soddisfatta la condizione che y sia sempre eguale ad: $ax + b$ (per es. $y = 3x + 2$) ove a e b sono due numeri dati e fissi (rispettivamente 3 e 2) noi ci troviamo qui davanti appunto ad una questione in cui certe lettere come x ed y dinotano numeri variabili, mentre certe altre, come a e b dinotano numeri fissi, o, come si suol dire, costanti.

Nella equazione: $x^2 + px + q = 0$ è pure da riguardarsi come costante la x quando lo siano i coefficienti p e q , e quando la x dinoti l'una o l'altra delle radici della equazione stessa: in questo esempio tutte le quantità p q x dinotano dunque delle costanti.

Nella formola relativa al moto uniforme: $s = vt$ (es. n. 2) nella quale t indica il numero delle unità di tempo trascorso ed s il numero delle unità di lunghezza percorse alla fine del tempo t , appunto perchè si tratta di moto uniforme, e in tal caso, v dinota un numero fisso, che potrà cangiare da problema a problema, ma che per uno stesso problema va considerato come costante, mentre t ed s sono variabili e al variare di t , varia s in modo però che sia sempre $s = vt$.

Infine, per considerare l'esempio di più di due grandezze variabili, se noi ricordiamo le formole relative alla caduta di un grave nel vuoto e cioè: $v = u - gt$, $s = ut - \frac{1}{2}gt^2$, noi vediamo che g (accelerazione della gravità) dinota sempre lo stesso numero (in metri 9,8) se si tratta di esperimenti fatti nello stesso luogo o in luoghi di eguale latitudine geografica, mentre u (velocità iniziale in metri) t (tempo in secondi) v (velocità alla fine del tempo t in metri) s (lunghezza del cammino percorso alla fine del tempo t) sono variabili, e tali, che noti i valori di due tra esse sono, come l'Algebra insegna, determinati pienamente i valori delle altre due grandezze.

Riassumendo queste osservazioni possiamo dire:

Vi sono grandezze, che in un dato esperimento o in uno stesso problema, restano invariate, sia perchè sono dei numeri dati e fissi, sia perchè si riguardano come tali durante l'esperimento o lungo il problema; vi sono grandezze che in un dato esperimento o in uno stesso problema possono essere rappresentate da una successione di numeri o, come si suol dire, possono variare liberamente, almeno entro determinati limiti, assumendo qualunque valore espresso da un numero reale, compreso entro quei limiti; e vi sono grandezze che in un esperimento o in uno stesso problema variano bensì, ma i cui valori sono, secondo leggi prestabilite, determinati dai valori di altre grandezze che possono invece variare liberamente.

Le grandezze che rimangono sempre le stesse o si riguardano come tali in una stessa questione diconsi grandezze **costanti**.

Le grandezze che possono variare liberamente assumendo dati valori, almeno entro certi limiti, si chiamano **variabili indipendenti**; e quelle invece che pur essendo variabili sono tali che i valori di esse sono determinati o dipendono dalle prime, diconsi **variabili dipendenti**.

Per significare che i valori di una variabile dipendente y si esprimono per mezzo di quelli di una variabile indipendente x , si suol dire che y è una **funzione della x** ; e scrivere: $y = f(x)$ ($f(x)$ si legge: funzione di x , o qualche volta: la f di x). Possiamo anche dire che: una grandezza y è funzione di un'altra x , quando per ogni valore di x assume un determinato valore o un sistema di valori determinati. Quando per ogni valore di x la y assume sempre lo stesso valore, allora si dice che la y è costante.

Oss. emp. — Ad es. la temperatura di un corpo si può considerare come funzione del tempo. Ciò non significa punto che il tempo sia esso la causa della temperatura, ma che esistono delle

relazioni simultanee fra le variazioni della durata e quelle del termometro. Nel moto uniforme lo spazio percorso s è funzione del tempo t impiegato a percorrerlo. La lunghezza della circonferenza è funzione del raggio. Nel moto uniformemente ritardato la velocità v alla fine del tempo t e lo spazio percorso dopo t unità di tempo sono funzioni di t e della velocità iniziale u

12. — Se x è una variabile indipendente, e se ci riferiamo alla rappresentazione geometrica dei numeri reali sulla retta, allora, come già sappiamo, ad ogni valore di x corrisponde sulla retta un punto; e reciprocamente. Se poi consideriamo i valori che la x assume in un **tratto** od **intervallo** (i cui valori estremi siano a e b) e sia data una legge, secondo la quale per ognuno di questi valori risultino determinati uno o più valori di un'altra variabile y , nel quale caso y è una funzione di x , allora assumendo i valori di x come ascisse, e i corrispondenti valori di y come ordinate di punti del solito piano, mediante un sistema di assi cartesiani (ortogonali) il luogo degli estremi delle ordinate è un *diagramma*. La legge secondo cui la y dipende da x può essere qualunque, purchè tale che per ogni valore di x preso in un certo intervallo risulti pienamente determinato un valore od un certo numero di valori per la y .

I casi che più frequentemente si considerano, in una trattazione elementare come questa, sono quelli in cui ad ogni valore di x corrisponda un solo valore per la funzione y ; ciò che del resto abbiamo sempre incontrato sin qui.

Può darsi che la legge di dipendenza della y dalla x sia espressa, come si suol dire, *analiticamente*, cioè sia tale che si possa ricavare il valore di y , dato quello di x , eseguendo sopra questo valore, ed eventualmente sopra costanti date, un determinato numero di operazioni di calcolo (addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni ecc.). Così se $f(x)$ è: $3x + 2$ e si pone: $y = 3x + 2$,

dato il valore di x , si ha quello di y moltiplicando il primo per 3 e aggiungendo poi 2 al prodotto ottenuto.

In tal caso si dice che la relazione: $y = f(x)$ è la **equazione della curva, rappresentativa della funzione $f(x)$** od anche del suo diagramma.

13. — Il diagramma rappresentativo di una funzione può constare di un gruppo di punti separati gli uni dagli altri come nell'esempio del prezzo medio settimanale di una merce: (es. 1 n. 8) in tal caso diremo che la funzione considerata (cioè qui il prezzo medio settimanale) è una funzione **discontinua** del tempo. Come altro esempio di funzione discontinua possiamo citare la variazione della popolazione al variare del tempo; perchè egli è ben chiaro che la popolazione al variare del tempo cresce o decresce per unità.

La funzione invece rappresentata dal diagramma delle temperature, o delle maree, (es. 1 e 3 n. 10) è di quelle che diconsi **continue**, almeno nell'intervallo di tempo che si considera: perchè è ben ovvio che un corpo non può passare da una temperatura t ad un'altra t' senza passare per tutti i valori intermedi del segmento del termometro compreso fra t e t' . Così un uomo non può passare da un'altezza ad un'altra senza passare per le altezze intermedie. Così ancora un treno che si muove tra due stazioni passa per ogni punto intermedio del tratto che le congiunge.

Quando noi diciamo che $f(x)$ è **continua** nel punto c dell'intervallo (a, b) intendiamo di dire che mentre x varia passando da valori minori di c , ma prossimi a c quanto si vuole, a valori maggiori di c , ma pur essi vicinissimi a c , la ordinata y passa da valori minori di

$f(c)$, ma prossima a $f(c)$ quanto si vuole, a valori maggiori di $f(c)$, ma prossimi a $f(c)$.

Meglio si esprime questo fatto dicendo che per quanto si fissi un segmento, o tratto, ε piccolo ad arbitrio, si può sempre determinare un intervallo (a, b) sull'asse delle x racchiudente il punto c tanto piccolo, che la differenza dei valori $f(a)$, $f(b)$ che la $f(x)$ assume agli estremi dell'intervallo (a, b) riesca ancora più piccola di ε .

Ma in questo trattato elementare ci atterremo alla prima delle accezioni qui riportate. E diremo che una funzione $f(x)$ è **continua in tutto l'intervallo** (a, b) di valori della variabile indipendente x , se la stessa $f(x)$ è continua, nel senso ora precisato, in ciascuno dei punti di questo intervallo.

La prima delle due figure qui sotto riportate ci dà un esempio di una funzione continua non solo nel punto c ma in tutti i punti dell'intervallo (m, n) racchiudente c ; la seconda ci porge l'esempio di una funzione continua nel tratto da a' fino ad a e nel tratto da c fino a b' ma non continua in tutto l'intervallo (a', b') anzi discontinua in c .

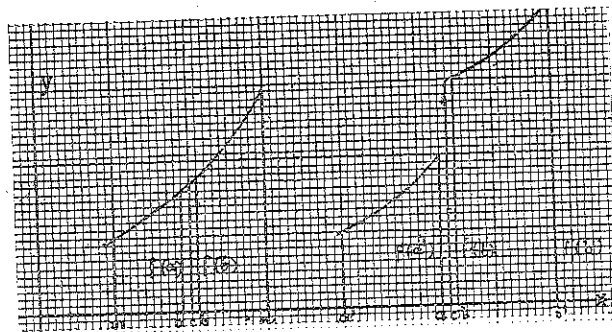


Fig. 20

Come altro esempio, il diagramma delle percorrenze del treno diretto da Venezia a Milano è **continuo a tratti**, come a suo luogo abbiamo rilevato.

14. — Sia $a < b$: per fissar le idee supporremo che l'intervallo a, b dei valori di x che si considerano sia una porzione dell'asse positivo delle x e che $f(x)$ sia sempre positiva per tutti i valori di x dell'intervallo stesso. Allora per esprimere che variando x da a a b con l'assumere i valori $a, x_1, x_2, \dots, b$, i valori corrispondenti di $f(x)$ sono sempre *crescenti*, cioè: $f(a) < f(x_1) < f(x_2) < \dots < f(b)$ diremo che la funzione $f(x)$ è **crescente** nell'intervallo considerato: e per esprimere che variando ancora x da a a b i valori corrispondenti di $f(x)$ sono sempre *decrescenti* nel senso cioè che: $f(a) > f(x_1) > f(x_2) > \dots > f(b)$ allora diremo che $f(x)$ è **decrescente** nell'intervallo medesimo.

E diremo che la $f(x)$ **assume in c un valore massimo** $f(c)$ se per valori di x precedenti a c e per valori di x seguenti di c in un intervallo a, b che comprende c , i valori corrispondenti della funzione sono tutti minori di $f(c)$; diremo che la $f(x)$ assume in d un valore **minimo** $f(d)$, se per valori di x precedenti a d e seguenti di d i valori di $f(x)$ sono tutti maggiori di $f(d)$.

Ad es. la curva della temperatura dell'esercizio del num. 10 presenta un massimo alle ore $8\frac{3}{4}$ espresso da: 38.04 ed un minimo di 37.04 alle $10\frac{1}{2}$.

Allorquando $f(x)$ è espressa come abbiamo detto analiticamente, e si ha che $y = f(x)$, anche se non è tracciata completamente la curva, possiamo facilmente riconoscere se in un dato punto c dell'intervallo che si considera per la x , la $f(x)$ ha un valore massimo, calcolando i valori di $f(x)$ per due punti a sinistra e a destra di c e vicinissimi a c , come ad es. $c - h$ e $c + k$ ove h, k dinotano due numeri piccolissimi; se si verificherà che: $f(c - h) < f(c) < f(c + k)$ allora sarà a dirsi che $f(c)$ è un **massimo** per $f(x)$. Analogamente si troverà che se: $f(d - h) > f(d) > f(d + k)$ allora $f(d)$ è un **minimo**. In altre parole si ha che $f(c)$ è un **mas-**

simo di $f(x)$ per $x=c$ se la differenza $f(c+h) - f(c)$ si conserva **negativa** qualunque sia il segno e la piccolezza di h ; e si ha un **minimo** se la differenza stessa si conserva **positiva**.

Così p. es. la funzione: $10x - x^2$ ha un massimo per $x=5$ e questo massimo è: 25. Infatti si ha:

$$f(5-h) = 10(5-h) - (5-h)^2 = 25 - h^2 < 25$$

$$f(5+k) = 10(5+k) - (5+k)^2 = 25 - k^2 < 25$$

$$f(5) = 10 \cdot 5 - 5^2 = 25$$

sicché: $f(5-h) < f(5) < f(5+k)$. Ad es. per $x=4,9$ si ha che $f(4,9) = 24,99$ e per $x=5,1$ $f(5,1) = 24,99$.

Eserc. 1 - Verificare che per $x=-5$ la funzione $y=x^2+10x-6$ è tale che:

$(x+h)^2 + 10(x+h) - 6 - (x^2 + 10x - 6) = h(h+2x+10)$ è sempre positiva qualunque sia il segno di h , e quindi che y ha un **minimo** per $x=-5$ e che questo minimo è: -31.

Es. 2 - Verificare che nella funzione $y=ax^2+bx+c$ si ha identicamente:

$a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) = h(ah + 2ax + b)$; e quindi che se a è **positivo**, per $x = -\frac{b}{2a}$ la funzione x ha un **minimo**, e questo minimo è: $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Es. 3 - Nella funzione: $y = -x^2 + 10x - 6$ si ha che: $-(x+h)^2 + 10(x+h) - 6 - (-x^2 + 10x - 6) = h(-h - 2x + 10)$ è sempre negativa, qualunque sia il segno di h , per $x=5$ e quindi la y ha un **massimo**, e questo è: 19.

Es. 4 - Verificare che se nella: $y = ax^2 + bx + c$ è **negativo**, per $x = -\frac{b}{2a}$ si ha un **massimo**, e questo è: $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Es. 5 - Se $y = px^2$ e se p è **positivo**, verificare che per $x=0$ $p(x+h)^2 - px^2$ ossia: $hp(h+2x)$ è sempre positiva, qualunque sia il segno di h , e quindi che y ha un **minimo** e che questo minimo è zero.

15. — Quando $f(x)$ è della forma: $ax+b$, ove a e b dinotano numeri noti, dei quali il primo non sia zero, e si pone: $y = ax+b$, allora si dice che y è **funzione**

di **I° grado** di x , od anche che y è una **funzione lineare** di x .

Quando $f(x)$ è della forma: $ax^2 + bx + c$, ove a, b, c dinotano numeri noti, dei quali il primo non sia zero, e si pone: $y = ax^2 + bx + c$, allora si dice che y è **funzione di II° grado**, od anche **funzione quadratica** di x .

Quando, più generalmente, si ha:

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + hx + k$$

con a diverso da zero, allora si dice che y è una **funzione di grado n** della x ed i numeri $a, b, \dots, h, k$ sono i **coefficienti** dei vari termini della funzione.

Le funzioni come, $ax+b$, ax^2+bx+c , $ax^n+bx^{n-1}+\dots$, si dicono **funzioni intere**.

Le funzioni che si presentano sotto la forma di un quoziente di due funzioni intere l'una di un certo grado m e l'altra di un altro grado n , si dicono **funzioni frazionarie**.

Le funzioni che studieremo mediante la rappresentazione grafica sono: quelle di **I° grado**; quelle di **II° grado**:

le **funzioni frazionarie** della forma: $y = \frac{a}{x}$.

Si dice che i valori x_1, y_1 di x ed y **soddisfano** alla equazione $y = f(x)$ quando sostituiti in luogo di x, y danno una identità numerica. Ad es. 2 e 8 soddisfano alla equazione $y = 3x + 2$ perchè si ha l'identità $8 = 3 \cdot 2 + 2$; invece 2 e 9 non soddisfano alla equazione $y = 3x + 2$ perchè 9 non è eguale a $3 \cdot 2 + 2$.

Se i valori x_1, y_1 di x ed y soddisfano alla equazione: $y = f(x)$, il punto di coordinate x_1, y_1 appartiene al gruppo di punti, o alla curva rappresentata dalla equazione stessa; e un punto le cui coordinate non soddisfano all'equazione data: $y = f(x)$, non appartiene alla rappresentazione grafica dalla funzione $f(x)$. Ad es. il punto di coordinate 2

e 16 appartiene al luogo geometrico rappresentato dalla equazione: $y = 10x - x^2$; il punto di coordinate 3 e 16 non vi appartiene perchè 16 non è eguale a: $10 \cdot 3 - 3^2$.

Funzioni lineari.

16. — Quando diciamo che la variabile y è direttamente proporzionale alla variabile x intendiamo che se: x' x'' sono due valori qualunque di x , o, come si suol dire, due **stati della variabile** x , e y' y'' sono i corrispondenti valori della y , si ha che: $y':y'' = x':x''$ od anche: $y':x' = y'':x''$. Se a è il valore comune di questi due quozienti, ciò si suole esprimere scrivendo che: $y:x = a$, od anche: $y = ax$. Reciprocamente, se $y = ax$ e ad x' corrisponde: $y' = ax'$, e ad x'' corrisponde: $y'' = ax''$, si ha subito che: $y':y'' = x':x''$ ed anche:

$$y':x' = y'':x''.$$

Nella relazione: $y = ax$, y è una funzione del tipo: $ax + b$, nel caso speciale che sia b eguale a zero: y è dunque una funzione lineare di x .

Esemp. 1 — Ad es. i due termometri Celsius (centigrado) e Réaumur (ottantigrado) hanno lo stesso zero, e il rapporto delle loro colonnine è $\frac{5}{4}$, così che a $\frac{4}{5}$ gradi Réaumur corrispondono 5 gradi di Celsius; perciò indicando con y la temperatura in gradi Réaumur e con x la temperatura centigrada abbiamo sempre che: $y = \frac{4}{5}x$.

Es. 2 — I due termometri Celsius e Fahrenheit sono così disposti che allo zero del primo corrispondono 32 gradi dell'altro, e che a 5 gradi del primo corrispondano 9 gradi del secondo: indicando con y la temperatura in gradi Fahrenheit, si ha che: $y = \frac{9}{5}x + 32$, equazione della forma $y = ax + b$.

Es. 3. — Si sa dalla Fisica che la lunghezza di una spranga di ferro cresce proporzionalmente alla temperatura: quindi se p. es.

a 4 cent. essa ha un metro di lunghezza, posto che per ogni grado centigr. di temperatura l'aumento della lunghezza sia di metri 0,000012, la lunghezza y della spranga alla temperatura di t gradi centigradi sarà data da: $y = 1 + 0,000012(t - 4)$. La variabile indipendente qui è t .

17. a) **Equazione: $y = x$.** — Se $y = x$ ossia se:

$y:x = 1$, per avere la rappresentazione grafica osserviamo che ai valori:

$-2 -1 0 1 2 \dots a$ di x corrispondono rispettivamente i valori:

$-2 -1 0 1 2 \dots a$ di y . I punti di coordinate:

$(-2 -2) (-1 -1)$

$(0 0) \dots$ sono situati

sulla bisettrice dell'angolo XOY ; e

reciprocamente, o-

gni punto P di questa bisettrice avendo le coordinate

PM, PN fra loro eguali è tale che: $y = x$. Il diagramma che corrisponde alla equazione lineare: $y = x$ è pertanto una retta, che è la bisettrice dell'angolo degli assi, entrambi positivi o negativi.

Se invece: $y = -x$ allora si trova analogamente che il diagramma è la bisettrice esterna dell'angolo suddetto $\widehat{YOX}$.

b) **Equazione: $y = ax$.** — Si abbia ora la equazione: $y = ax$, ossia: $y:x = a$.

Ai valori: $\dots -2 -1 0 1 2 \dots$ di x corrispondono i valori: $\dots -2a -a 0 a 2a \dots$ di y : così ab-

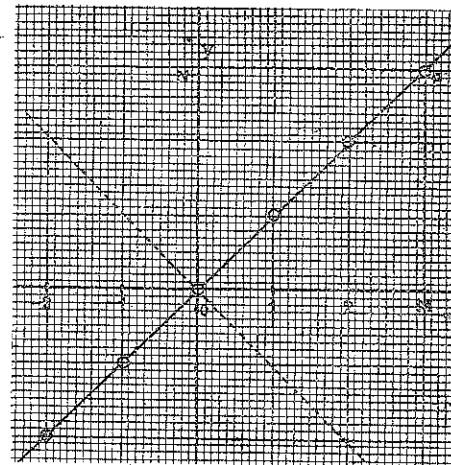


Fig. 21

biamo i punti $B' A' O A B$ rispettivamente di coordinate: $(-2 - 2a) (-1 - a) \dots$. I triangoli $O 1 A$, $O 2 B$ sono si-

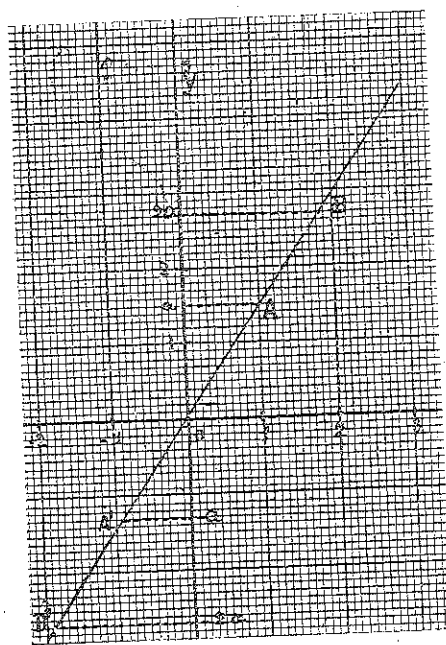


Fig. 22

mili e quindi la retta OA passa per B , e siccome A' è il simmetrico di A rispetto ad O perchè $OA = OA'$ così la retta stessa passa per A' e per la stessa ragione anche per B' .

Lo stesso dicasi dei punti le cui ascisse avessero valori intermedi a quelli presi in considerazione e le cui ordinate fossero a volte queste ascisse.

Reciprocamente, ogni punto P della retta costruita ha due coordinate x ed y tali che $y : x = a : 1$ cioè:

$$y = ax.$$

Il diagramma corrispondente alla equazione lineare $y = ax$ è dunque esso pure quello di una retta passante per l'origine, situata nell'angolo degli assi positivi se a è positivo come nel caso della figura, o nell'angolo a questo adiacente, se a è negativo.

c) **Equazione: $y = b$.** — Può darsi che quando in un problema una grandezza x varia, la y rimanga costante, conservando sempre lo stesso valore b ; in tal caso la y si chiama ancora funzione di x , ma si scrive: $y = b$. La rap-

presentazione grafica di y è in tal caso la *parallela all'asse della x* , alla distanza b da esso.

Reciprocamente, ogni punto P di questa parallela è tale che mentre la sua ascissa può assumere qualunque valore, l'ordinata corrispondente ha sempre lo stesso valore b .

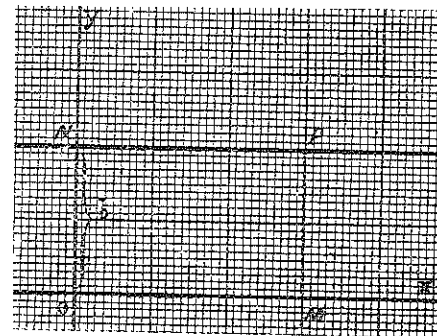


Fig. 23

Invece la equazione: $x = a$ rappresenta una retta parallela all'asse y , ad una distanza eguale ad a .

d) **Equazione: $y = ax + b$.** — Consideriamo infine il caso che la funzione y sia data dalla equazione completa di 1° grado: $y = ax + b$. (1)

Ponendo $y = 0$ si ha che: $x = -\frac{b}{a}$, vale a dire il

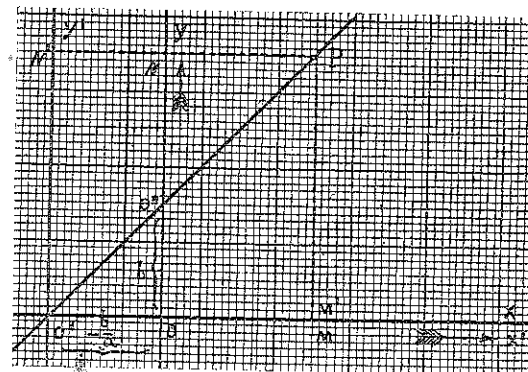


Fig. 24

punto O' che ha queste coordinate $(-\frac{b}{a} \ 0)$ è situato

sull'asse delle x e alla distanza $\frac{b}{a}$ nel verso negativo. E se $x=0$, allora $y=b$, e il punto O'' di coordinate $(0, b)$ giace sull'asse della y alla distanza b dall'origine.

Se poi noi consideriamo un altro sistema di assi $Y'O'X'$ che abbia per asse y' la parallela condotta da O' all'asse della y e per asse delle x' lo stesso asse delle x di prima, noi avremo che:

$$y = y' \quad x = x' - \frac{b}{a}$$

come si vede dalla figura, e quindi, sostituendo nella (1) otterremo la equazione seguente: $y' = ax'$ (2).

Ma siccome rispetto al sistema $Y'O'X'$ l'equazione (2) è rappresentata graficamente da una retta passante per O' , così conchiuderemo che il diagramma della (1) è la retta passante per i punti O' ed O'' .

Possiamo dunque dire che in generale: *La rappresentazione grafica di una funzione lineare della variabile x nel sistema cartesiano (ortogonale) è sempre una retta.* E reciprocamente, dalla figura stessa si rileva che: *una retta non parallela all'asse y viene rappresentata analiticamente da una equazione lineare: $y = ax + b$ nelle coordinate cartesiane (ortogonali) x ed y di ogni suo punto; e se è parallela all'asse y , essa ha per equazione: $x = a$.*

18. — Se si considera una equazione come la:

$Ax + By + C = 0$, se B non è zero, essa può mettersi sempre sotto la forma: $y = ax + b$ dividendo per B e ponendo:

$-\frac{A}{B} = a$, $-\frac{C}{B} = b$. E se $B = 0$, allora la equazione $Ax + C = 0$ diventa della forma: $x = a$ ponendo:

$$-\frac{C}{A} = a.$$

Dunque:

Una equazione generale lineare in x ed y è sempre rappresentata da una retta.

Se un punto di coordinate x_1, y_1 è situato sulla retta si deve avere:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

o, come si suol dire, le coordinate di un punto della retta soddisfanno all'equazione della retta.

Ad es. il punto $(2, 3)$ è situato sulla retta di equazione: $3x + 4y - 18 = 0$; non vi è situato invece il punto: $(3, 2)$.

19. — Se si ha l'equazione: $y = ax + b$ e se $O'O''$ è la retta che la rappresenta, conducendo da O la parallela alla $O'O''$ si ha che:

$$\frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM} = a;$$

perciò la parallela condotta dall'origine O alla retta data ha per equazione: $y = ax$.

Se noi consideriamo quest'altra equazione: $y = ax + b'$ possiamo dire che que-

sta rappresenta una retta parallela alla retta di equazione: $y = ax$, quindi parallela anche alla retta di equazione: $y = ax + b$. Pertanto:

Due equazioni come: $y = ax + b$, $y = ax + b'$, che differiscono soltanto pel termine noto, sono rappresentate da due rette fra loro parallele.

È per questo che il rapporto: $\frac{PM}{OM} = a$ si chiama

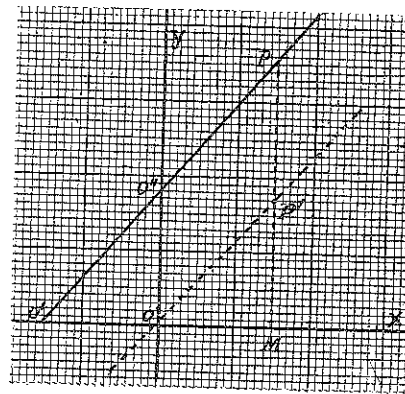


Fig. 25

costante di direzione, o coefficiente angolare od anche **pendenza** della retta sull'asse delle x .

È da osservare per altro che mentre nella equazione $y = ax + b$ noi possiamo dare alle ascisse quei valori che vogliamo compresi fra due numeri dati, ad esem. $x = 0,01$, $x = -0,01$ come $x = 0,00001$, nella costruzione della rappresentazione grafica non possiamo intercalare quanti punti noi vogliamo. Per es. colla carta millimetrata prendendo come unità di misura il mm. è certo che noi non possiamo coi nostri strumenti segnare ad es. il punto di ascissa 0,00001. La costruzione grafica è dunque sempre una *costruzione approssimativa*.

Esem. 1 - Ripigliamo l'equazione: $y = \frac{9}{5}x + 32$ che lega le

letture fatte sul termometro Celsius e quelle fatte sul termometro Fahrenheit. Se noi determiniamo la retta che essa rappresenta, troviamo che essa passa pel punto: $(0, 32)$ e pel punto:

$(-20 - 4)$: essa è dunque la retta AB , la quale interseca l'asse della x in un punto M tale che OM è eguale a: -17 circa (il valore esatto di OM ricavato dalla equazione facendo $y = 0$, ma che noi non possiamo direttamente costruire, sarebbe questo: $OM = -\frac{160}{9}$ ossia: $-17,777...$

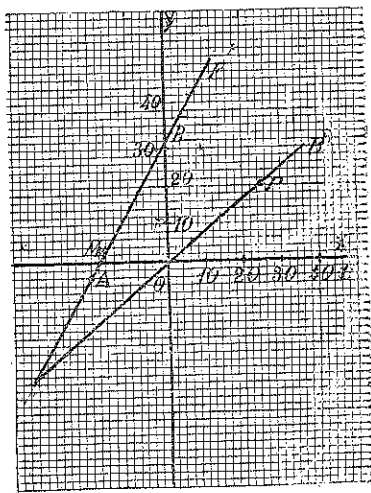


Fig. 26

Consideriamo anche l'equazione: $y = \frac{4}{5}x$, che serve a determinare i gradi Réaumur, noti i gradi centigradi x ; essa viene rappresentata dalla retta OP passante per l'origine e pel punto P di coordinate 25 e 20. Il punto di intersezione delle due rette R ed F ha per ascissa -32 , epperò a -32 gradi cent. corrisponde lo stesso numero di gradi Fahrenheit e Réaumur, cioè: $-25,6$.

Possiamo quindi dire che, data una temperatura in gradi di uno dei tre termometri, si possono determinare graficamente (ricordando che i gradi centigradi sono contati sull'asse della x) i gradi corrispondenti degli altri due, misurando le coordinate corrispondenti ad una data ascissa.

Es. 2 - Un altro esempio di funzioni lineari ci è dato dalla equazione del moto uniforme rettilineo di un punto P .

Indicando con s lo spazio percorso, con t il tempo e con v la velocità costante, abbiamo $sv = t$. Se noi risguardiamo t ed s rispettivamente come ascissa e ordinata del punto P , avremo una retta passante per l'origine. In questo caso al valore zero di t corrisponde il valore zero anche per s . Ma se il punto P parte da un punto A di ordinata a sull'asse delle y , si ha in tal caso: $s = vt + a$ e lo spazio s è rappresentato da una retta parallela alla precedente.

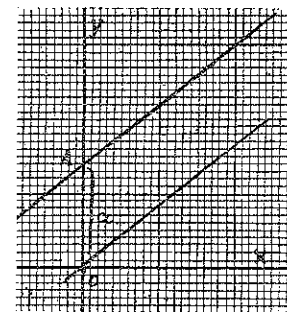


Fig. 27

È appunto con l'aiuto della rappresentazione grafica (es. 1 n. 9) che le amministrazioni ferroviarie rappresen-

tano il movimento dei treni con una linea determinata. Per semplificare la rappresentazione si suppone che fra due fermate i treni abbiano delle velocità costanti (eguali alla loro velocità media fra le due fermate): il diagramma quindi è composto di tratti rettilinei. Le stazioni sono indicate in una linea verticale; le ore sono contate sopra una retta orizzontale come nella figura 15. Le fermate sono rappresentate da tratti orizzontali. Dal diagramma, detto *orario grafico*, si può vedere quali sono gli incroci dei treni; e per distinguere i diversi treni, diretti, omnibus, accelerati... si usano particolari segni convenzionali. Ma tranne che dalle amministrazioni questi orari comunemente non sono adoperati.

Rapporto incrementale.

20. — Quando una grandezza x varia, essa aumenta o diminuisce, o, come si suol dire, riceve un **incremento**

o **positivo** o **negativo**. Se x da un valore x' passa ad un valore x'' , l'incremento di x è dato dalla differenza: $x'' - x'$, la quale sarà positiva o negativa, secondo che: $x'' > x'$; oppure: $x'' < x'$.

L'incremento: $x'' - x'$ della variabile x si indica col simbolo: Δx (leggesi: delta x) e si scrive: $\Delta x = x'' - x'$. Questo simbolo non significa un prodotto di Δ per x , ma indica il risultato della operazione: $x'' - x'$.

Così, se per es. t indica il tempo (espresso in min. secondi) e Δt dinota un incremento di tempo (espresso in secondi o frazioni di min. secondo e che si ritiene sempre positivo) allora: $t + \Delta t$ dinoterà il tempo che si considera come successivo al tempo t : è superfluo rilevare che la differenza fra $t + \Delta t$ e t è appunto Δt .

Consideriamo ora una variabile y , la quale sia funzione di x , e che la x abbia l'incremento Δx : allora, come ad x corrisponde il valore y , così all'incremento Δx corrisponderà (se la y non è una costante) un certo incremento che per analogia potremo dinotare con Δy , e per conseguenza al valore $x + \Delta x$ della variabile indipendente corrisponderà il valore $y + \Delta y$ della funzione. L'incremento Δy non è arbitrario, come l'incremento Δx , ma dipende, come facilmente si vede, da x e da Δx ed è ben determinato, noti che siano x e Δx , generalmente parlando.

Per fissar le idee con un esempio si supponga che sia: $y = x^2 + 9$. Quando x assume un dato valore, allora il valore corrispondente di y è $x^2 + 9$; quando x è divenuto $x + \Delta x$ il corrispondente valore $y + \Delta y$ altro non è che:

$$x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x + 9;$$

perciò:

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x.$$

Se dunque ad es. $x = 3$, e noi diamo ad x l'incremento: $\Delta x = 0,05$, y avrà l'incremento:

$$\Delta y = 2 \cdot 3 \cdot 0,05 + (0,05)^2 = 0,3025.$$

E se essendo $x = 3$ noi diamo ad x l'incremento: $\Delta x = -0,01$, allora abbiamo che:

$$\Delta y = 2 \cdot 3 \cdot (-0,01) + (-0,01)^2 = -0,0599.$$

Dicesi **rapporto incrementale** della funzione y rispetto alla variabile x il quoziente fra l'incremento Δy della funzione y e l'incremento Δx della variabile indipendente x : esso dinotasi con: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ad. es. il rapporto incrementale della funzione: $y = x^2 + 9$ quando si considera uno stato x della variabile con l'incremento Δx , è dato da: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, per cui se: $x = 3$, $\Delta x = 0,05$ allora il rapporto stesso è: $\frac{0,3025}{0,05} = 6,05$; e se $x = 3$, $\Delta x = 0,01$ esso è: 5,99.

Ciò premesso, consideriamo la equazione della retta:

$$y = ax + b;$$

noi abbiamo che: $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$ e quindi:

$$\Delta y = a \cdot \Delta x \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Pertanto se: $y = ax + b$ è l'equazione in coord. cartes. di una retta, il **rapporto incrementale** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cioè il rapporto fra l'incremento della ordinata (che corrisponde ad un dato incremento dato arbitrariamente all'ascissa) e quello dell'ascissa è costante, ed eguale al coefficiente angolare — o pendenza — a della retta stessa. Questa particolarità si può rilevare direttamente dalla figura qui accanto osservando

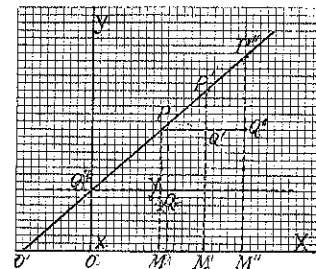


Fig. 28

che: $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{P''Q''}{PQ} = \dots$;

$= \frac{PQ}{O''Q} = \frac{y - b}{x} = a$, per cui essa è una proprietà caratteristica della retta.

21. — Se a è la *pendenza* di una retta passante per l'origine, sappiamo che: $y = ax$ è la equazione di questa retta.

La equazione: $y = ax + (y' - ax')$, ove $x' y'$ sono le coordinate di un dato punto P del piano, essendo della forma: $y = ax + b$, è essa pure l'equazione di una retta; di più questa retta è parallela alla retta $y = ax$ avendo la stessa pendenza, e passa per il punto P perchè le coordinate $x' y'$ di P soddisfano a questa equazione (n. 18). Adunque la equazione:

$$y - y' = a(x - x')$$

rappresenta la retta di pendenza a , passante pel punto di coordinate $x' y'$.

La equazione: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ si può mettere sotto la

forma:
$$y = -\frac{b}{a}x + b,$$

la quale rappresenta una retta, come sappiamo, di pendenza: $-\frac{b}{a}$, e che passa pel punto: $(0 b)$. Ma è facile vedere che anche il punto: $(a 0)$ giace sulla retta e poichè una retta è individuata da due dei suoi punti come nel caso presente, $(0 b)$ $(a 0)$, così conchiuderemo che la equazione: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ rappresenta la retta che incontra l'asse della x alla distanza a e l'asse della y alla distanza b dall'origine delle

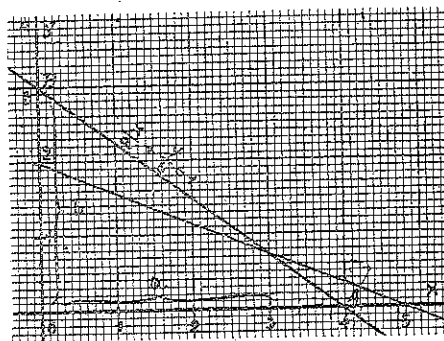


Fig. 30

coordinate. Ad es. la equazione: $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ rappresenta la retta che intercetta sull'asse della x un segmento OA eguale a 4 unità e sull'asse della y un segmento $OB = 3$.

Eserc. 1 - Determinare i segmenti che la retta di equazione: $y = ax + b$ stacca sugli assi.

Es. 2 - Data l'equazione generale di una retta, trovare la costante di direzione.

Es. 3 - Data la equazione di una retta: $y = 3x + b$, ove b è incognita, determinare il valore da darsi a b affinchè la retta stessa passi pel punto di coord. $(5 1)$.

Es. 4 - Data la equazione di una retta: $y = ax + 2$, ove a è incognita, determinare il valore da darsi ad a affinchè la retta passi pel punto $(5 1)$.

Es. 5 - Dati due punti mediante le loro coordinate trovare la equazione della retta che li congiunge.

Sistema di due equazioni lineari a due incognite.

22. **Esemp. 1** - Se sono date le due equazioni: $y = \frac{4}{5}x$ ed $y = \frac{9}{5}x + 32$, per soluzione comune di queste equazioni si intende una coppia di numeri che, sostituiti uno per x l'altro per y , soddisfano ad entrambe.

Risguardando x come ascissa e y come ordinata di un punto del solito piano rappresentativo, sappiamo che ciascuna di queste equazioni rappresenta una retta, (es. 1 n. 19) epperò il punto comune alle due rette avrà tali coordinate che saranno la soluzione comune delle equazioni di queste rette. Prolungando la retta OE e la retta OB nel diagramma di queste due rette, si troverebbe sulla carta millimetrata che il punto d'incontro B delle due rette stesse ha per ascissa -32 , come si avrebbe direttamente resolvendo il sistema col metodo di confronto.

Es. 2 - Se un treno parte dalla stazione O alla mezzanotte con la velocità di 45 Km. all'ora e un altro treno parte dalla stessa stazione un'ora dopo con la velocità di Km. 60 all'ora, noi avremo:

$$y = 45t \quad y = 60(t - 1).$$

Rappresentando le percorrenze di ciascun treno con diagrammi noi troviamo che essi sono dati da due rette uscenti rispettivamente da O e dal punto di ascissa 1 che si incontrano nel punto P di ascissa $t = 4$, come si

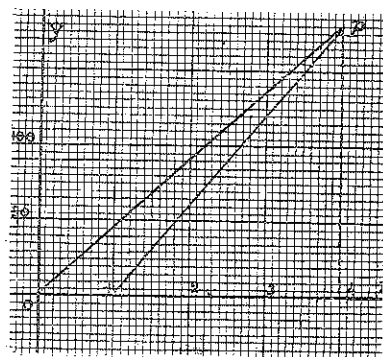


Fig. 29

avrebbe, risolvendo algebricamente le due equazioni.

Se sono date le due equazioni:

$$y = a_1x + b_1 \quad y = a_2x + b_2,$$

per avere i valori di x e y che le soddisfano basta determinare la rappresentazione grafica delle due rette, come si è fatto nell'es. 1; e le coordinate del loro punto di intersezione saranno la rappresentazione grafica dei valori di x ed y cercati.

Se invece le equazioni sono date sotto la forma generale:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

basterà trovare la loro rappresentazione grafica, che abbiamo già indicato al n. 18.

Es. 1 - Determinare, costruendo le rette di equazioni:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1, \text{ la soluzione comune di queste equazioni.}$$

Funzioni quadratiche.

23. — Una funzione quadratica di x è in generale della forma: $y = ax^2 + bx + c$ (n. 15) in essa figurano tre coefficienti a, b, c . Consideriamo la più semplice fra le funzioni quadratiche e cioè: $y = x^2$ (1).

Alle ascisse:

1 2 3 4... a ... corrispondono rispettivamente le ordinate:
1 4 9 16... a^2 ...;
mentre alle ascisse:
-1 -2 -3 -4...
- a corrispondono le stesse ordinate di prima. Se noi consideriamo dei valori intermedi fra quelli indicati per le ascisse, ad es.

$x = 0, 0,5, 1,5, 2,5...$
si ha: $y = 0, 0,25, 2,25, 6,25...$ e così otteniamo un numero maggiore di punti sempre più vicini ai precedenti e che si seguono con una certa uniformità. E da ciò si vede che:

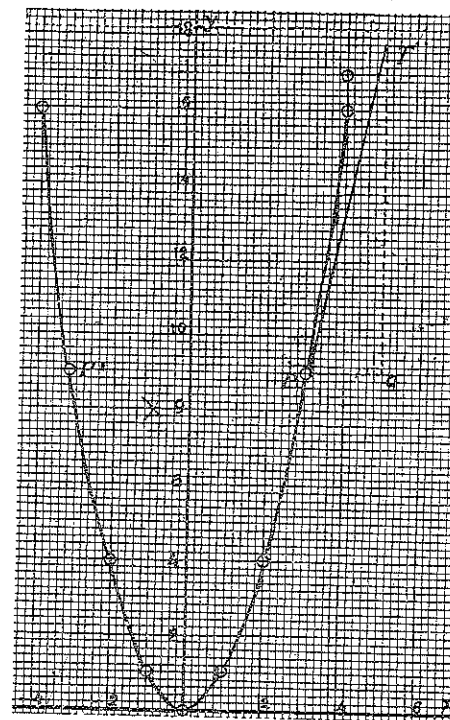


Fig. 31

a) Se un punto P di coordinate xy fa parte del

diagramma della funzione $y = ax^2$ vi appartiene pure il punto di coordinate: $-x, y$, cioè il punto **simmetrico** di P rispetto all'asse delle y .

b) Non vi è alcun punto del diagramma che giaccia al di sotto dell'asse delle x , vale a dire un punto che abbia negativa l'ordinata, perchè la y dovendo esser sempre il quadrato di un numero reale, anche se questo numero è negativo, il suo quadrato è sempre positivo. Al diagramma appartiene fra i punti dell'asse delle x , il solo punto O (origine).

c) Col crescere di x cresce anche y e in guisa che questo valore di y divenga anche maggiore di un determinato numero positivo m ; per questo basta prendere: $x = \sqrt{m} + h$, ove h è un numero positivo qualsiasi (per esempio 1).

d) Se l'ascissa x cresce di Δx , si ha che la ordinata y corrispondente cresce di una quantità Δy determinata dalla eguaglianza:

$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$
e quindi, tenendo conto che $y = x^2$ dalla eguaglianza seguente:

$$\Delta y = (2x + \Delta x) \cdot \Delta x \quad (2)$$

Da questa relazione risulta che più piccolo è l'incremento Δx , vale a dire, quanto meno esso differisce da zero (nel quel caso tanto meno $2x + \Delta x$ differisce da $2x$) e tanto meno Δy differisce da $2x \cdot \Delta x$; ma siccome questa quantità ha per fattore Δx , così essa differirà anch'essa quanto poco si vuole da zero, vale a dire potrà diventare ancor più piccola di ogni numero positivo ε dato piccolo ad arbitrio. Segue da ciò che col diminuire sempre più di Δx , diminuisce sempre più anche Δy , così da diventare minore di ogni numero dato, per quanto piccolo.

Ad es. per $x = 3$ se si volesse che Δy risulti minore di 0,001

basterebbe dare ad x un incremento $\Delta x < 0,0001$ perchè per $x = 3$ e $\Delta x = 0,0001$ si ha che $\Delta y = 6,0001 \cdot 0,0001 = 0,000600001 < 0,001$; e quindi per $\Delta x < 0,0001$ è: $\Delta y < 0,001$.

Dalla (2) si ha che:

$$(3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Ora si è visto (n. 20) che se vi sono sulla retta $y = ax + b$: i due punti: P e P' di coordinate (x, y) , $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, la pendenza della retta è data da: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, e che quando il punto P' si avvicina sempre più al punto P , allora Δx decresce indefinitamente e tende verso zero. Pertanto la pendenza della retta PP' si avvicina sempre più a $2x$. Sia PT la retta di pendenza $2x$.

Per un punto P'' del diagramma, compreso fra P e P' , si avrebbe una retta PP'' la cui pendenza è ancor più vicina a quella della PT , che non la pendenza della PP' . Si conchiude da ciò che il punto P' del diagramma che si ottiene dando a: Δx valori piccolissimi si può considerare praticamente situato sulla retta PT , di pendenza $2x$.

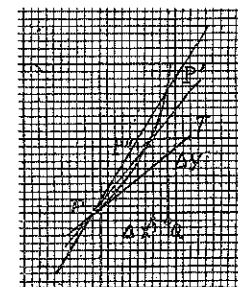


Fig. 32

La retta di pendenza $2x$ passante pel punto P del diagramma corrispondente alla equazione $y = x^2$ dicesi **retta tangente** al diagramma nel punto P . Risulta pure da ciò che questo diagramma è una *curva* che ha in ogni suo punto una retta tangente. Questa curva dicesi **parabola**.

L'asse delle y dicesi **asse di simmetria** della parabola, perchè i punti di questa curva sono, come si è visto, simmetrici rispetto all'asse delle y . il punto che essa ha

in comune con l'asse delle x , e cioè l'origine degli assi, chiamasi il **vertice** della parabola; e per quanto si è visto, la parabola si estende, come si suol dire, all'infinito, appunto perchè col crescere indefinitamente di x cresce pure indefinitamente y .

La tangente alla parabola nel punto O è l'asse delle x perchè quando x' differisce pochissimo da zero anche la pendenza $2x'$ differisce pure pochissimo da zero, sicchè la tangente nel vertice della parabola è la perpendicolare all'asse di simmetria.

Per costruire la tangente in un altro punto P della parabola basta portare parallelamente all'asse delle x un segmento PM eguale all'ascissa x' di P , indi il segmento perpendicolare MT di lunghezza $2y'$: la retta PT è la richiesta, perchè la sua pendenza è data da:

$$\frac{MT}{PM} = 2x'.$$

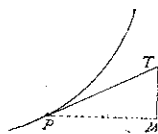


Fig. 83

24. — La funzione: $y = ax^2$ può esser ridotta alla funzione ora studiata assumendo a come unità di misura dei segmenti: basta quindi portare agli estremi delle ascisse x' le ordinate ax'^2 invece che x'^2 . Se a è positivo, la curva sta al disopra dell'asse delle x , cioè dalla parte delle ordinate positive; il contrario avverrà se a è negativo.

La funzione: $y = ax^2 + c$ assume il valore c per $x = 0$; se noi trasportiamo gli assi cartesiani parallelamente a se stessi nel punto $(0, c)$ ponendo: $x' = x$ $y' = y - c$, allora la equazione del luogo è: $y' = ax'^2$ la quale rappresenta una parabola. La rappresentazione grafica della $y = ax^2 + c$ è dunque una parabola che ha per tangente la parallela all'asse delle x alla distanza c da essa, dalla parte dell'asse y posit. o negat., secondochè c è positivo o negativo. Nella figura qui accanto è rappre-

sentato il diagramma relativo all'equazione: $y = 0,5x^2 - 1$; in questo caso si ha: $c = -1$ ed $a = \frac{1}{2}$; e la pendenza

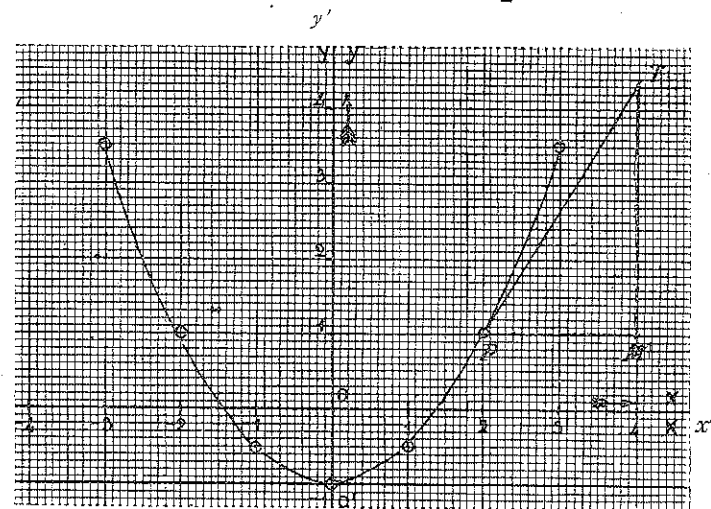


Fig. 84

della tangente alla parabola in un suo punto di ascissa x_1 è data da: $2 \cdot 0,5x_1$, cioè da x_1 .

Infine la funzione: $y = ax^2 + bx + c$ viene essa pure rappresentata come la ordinata variabile dei punti di una parabola. Basta applicare la trasformazione di coordinate:

$$y' = y \quad x' = x + \frac{b}{2a},$$

e porre: $c' = \frac{4ac - b^2}{4a}$, e si

troverà: $y' = ax'^2 + c'$.

Riferendo pertanto la curva ad un sistema di assi: $y' o' x'$, dei quali l'asse y' dista dall'asse delle y della quantità: $-\frac{b}{2a}$, e l'asse delle x' coin-

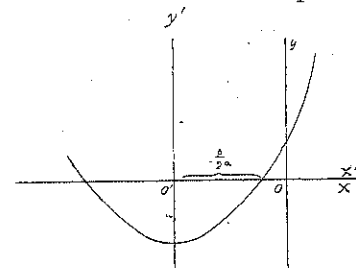


Fig. 85

cide con l'asse delle x , si avrà che la equazione della curva assume la forma $y = ax^2 + c$ precedentemente studiata.

Esemp. 1. - Si sa dalla Fisica che nel moto uniformemente vario la velocità è proporzionale al tempo, e che lo spazio percorso dal mobile partendo dalla quiete è proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerlo; sicchè si ha per lo spazio la formola: $s = at^2$, ove a è un fattore di proporzionalità. Ciò avviene p. es. di un corpo pesante, che si può considerare come avente un peso indipendente dall'altezza, il quale cada liberamente da pochi metri di altezza, facendo astrazione perciò dalla resistenza dell'aria. In questo caso la variazione della velocità (accelerazione) nelle singole unità di tempo si suol indicare con g , e dall'esperienza si ha che $g = 980$ centimetri circa nei nostri paesi (a Roma $g = 981,38$); allora t , ossia lo spazio percorso, è dato dalla seguente legge: $s = \frac{1}{2} g t^2$. (1)

Considerando il tempo come ascissa e lo spazio come l'ordinata corrispondente, la rappresentazione grafica della (1) è una parabola.

Es. 2. - La forza viva, che è il lavoro meccanico eseguito da un corpo di massa m è data, come si sa dalla Fisica dalla: $f = \frac{mv^2}{2}$. Riguardando m come costante, v come variabile indipendente (ascissa) ed f come funzione (ordinata) si vede qui pure che la rappresentazione grafica della: $f = \frac{m}{2} v^2$ è ancora una parabola.

Es. 3. - Per risolvere la equaz. quad.: $2,5x^2 + 1,8x - 0,5 = 0$ si può procedere così. Posto $y = 2,5x^2$ e $y = -1,8x + 0,5$ se noi eguagliamo i valori di y ritroviamo la equazione quadratica; il punto le cui coordinate soddisferanno contemporaneamente alle due equazioni in x ed y , avrà per ascissa una delle radici richieste. Ora il diagramma della seconda equazione è una retta di pendenza $-1,8$ e che incontra l'asse della y alla distanza $+0,5$, e il diagramma della prima è una parabola il cui vertice è l'origine degli assi e l'asse di simmetria è l'asse delle y . Costruendo questi diagrammi con la scala di 50 mm. per ogni unità lineare, noi vediamo che essi hanno due distinti punti in comune uno di ascissa positiva di poco più che 11 mm. e l'altro di ascissa negativa di circa 46 mm. e mezzo. Il primo di questi valori è circa 0,224 dell'unità

lineare di 5 cm. da noi scelta, cioè $x' = 0,224$ circa; mentre che il secondo è di circa 933 millesimi dell'unità, presi col segno meno.

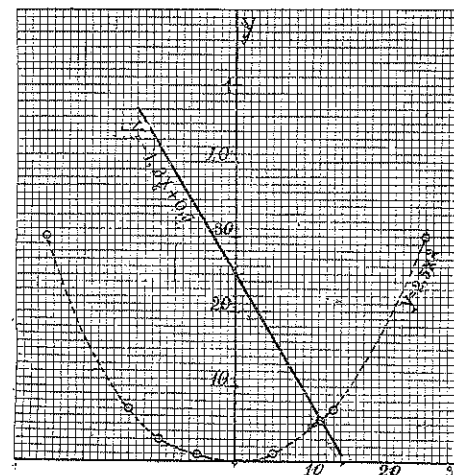


Fig. 36

Risolvendo la equazione si troverà che i nostri valori graficamente trovati sono abbastanza vicini ai valori esatti.

Eserc. 1. - Costruire i diagrammi, le cui equazioni sono:

$$y = 2x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = -2x^2, \quad y = -x^2, \quad y = -\frac{1}{2}x^2$$

Es. 2. - Costruire il diagramma di equazione: $y = \frac{1}{10}x^2$ da $x = -2 \dots$ ad $x = 2$, prendendo come unità di misura per le ascisse il mm. e per le ordinate il cm.

Es. 3. - Risolvere graficamente la equazione di II. grado in x $25x^2 + 18x - 5 = 0$.

Es. 4. - Si descriva la curva di equazione: $y^2 = x$; quella di equazione: $x = ay^2$.

Es. 5. - Descrivere i diagrammi di equazioni: $x^2 = y$ e $y^2 = 8x$.

Es. 6. - Sia data l'equazione: $x^2 + y^2 = r^2$ (1). Se P è un punto del piano di coordinate x ed y , sappiamo che la distanza r di P da O è data da: (fig. 37).

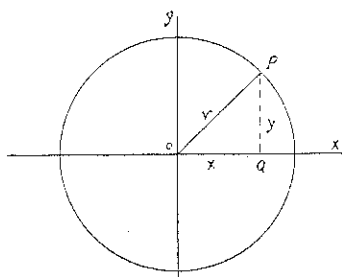


Fig. 37

r e di centro O .

Es. 7. - Descrivere il diagramma rappresentato dalla equaz.: $y = +\sqrt{3^2 - x^2}$ e limitato ai valori di x compresi fra 0 e 3; descrivere il diagramma: $y = -\sqrt{3^2 - x^2}$ e limitato agli stessi valori di x .

Es. 8. - Si descrivano i diagrammi relativi alle equazioni $x^2 + y^2 = 9$ $y = -\frac{3}{2}x + 3$ e si determinino graficamente le soluzioni comuni a queste due equazioni.

Es. 9. - Si verifichi che la equazione: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ rappresenta una circonferenza che ha per centro il punto di coordinate (1 2) e per raggio un segmento lungo 3 unità.

Rappresentazione grafica della funzione: $\frac{a}{x}$.

25. - Consideriamo da prima il caso più semplice: $y = \frac{1}{x}$.

Ai valori 1 e -1 di x corrispondono i valori 1 e -1 di y rispettivamente: i due punti che hanno queste coordinate sono sulla bisettrice dell'angolo YOX e sono simmetrici rispetto all'origine O degli assi. Ai valori successivi 2 3 4... di x corrispondono per y i valori:

$\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \dots$, e così si trovano corrispondentemente altrettanti punti situati nell'angolo YOX . Se consideriamo per la x valori negativi, e diamo ad x i valori: -2 -3 -4..., otteniamo per y valori negativi essi pure:

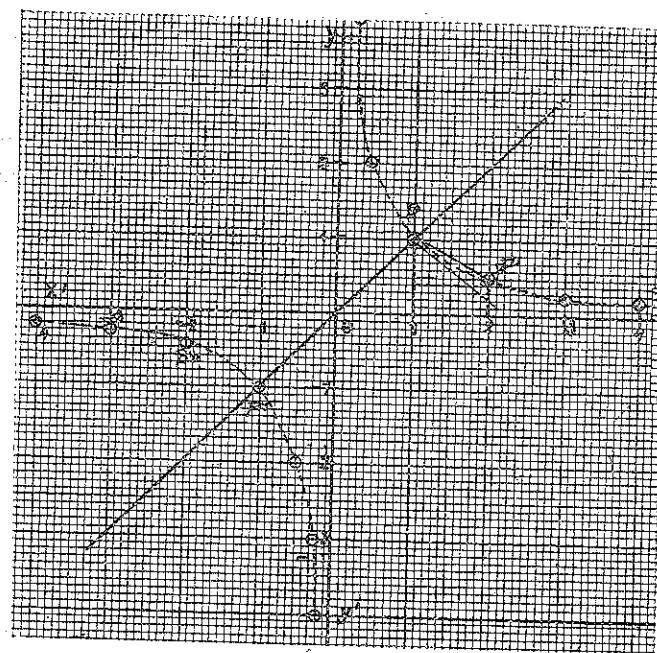


Fig. 38

$-\frac{1}{2} -\frac{1}{3} -\frac{1}{4} \dots$ che sono i reciproci dei primi, cosicchè i punti del nostro diagramma aventi l'ascissa minore di zero sono tutti situati nell'angolo $Y'OX'$. Inoltre se due punti hanno ascisse opposte, cioè x' e $-x'$ anche le loro ordinate $+\frac{1}{x'}$ e $-\frac{1}{x'}$ corrispondenti sono opposte, cosicchè i due punti P e P' aventi queste coordinate sono simmetrici rispetto al punto O , cioè allineati

con O e ad egual distanza da O e da parti opposte: per conseguenza per avere i punti della parte del diagramma che è situata nell'angolo $Y'OX'$ basta costruire i simmetrici di quei punti che sono nell'angolo YOX .

Nella figura 38 abbiamo assunto il cm. come unità di misura; ciò che impedisce con la carta millimetrata di descrivere punti di ascissa maggiore di 10 perchè non possiamo ad esempio segnare ordinate di $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$...

di cm.; ma ingrandendo l'unità di misura potremmo costruire un maggior numero di punti intermedi che non possiamo qui fare con l'unità da noi scelta.

Se diamo ad x (supposto diverso da zero), l'incremento Δx e quindi calcoliamo l'incremento Δy di y , dovendo essere: $(x + \Delta x)(y + \Delta y) = 1$ e quindi:
 $xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y = 1$ per essere: $xy = 1$
 otterremo: $y\Delta x + x\Delta y = -\Delta x \cdot \Delta y$ e quindi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{y}{x} - \frac{\Delta y}{x} \quad (1)$$

Qui è da osservare che se Δx è piccolissimo, e tanto vicino a zero quanto si vuole, per essere:

$$x \cdot \Delta y = -\Delta x (\Delta y + y)$$

e x diverso da zero e fisso, anche Δy è piccolissimo, e vicino a zero quanto si vuole. Se P è il punto di coordinate x, y e P' quello di coordinate $x + \Delta x, y + \Delta y$, per valori di Δx e quindi anche di Δy decrescenti indefinitamente il punto P' risulterà vicinissimo a P quando si vuole, e d'altronde il rapporto incrementale: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differirà da: $-\frac{y}{x}$, quanto pur si vuole. Consideriamo qui pure, come abbiamo fatto per la parabola, la retta che passa per P e che ha per pendenza il numero: $-\frac{y}{x}$, retta ben determinata, come sappiamo, e

che diremo PT . Questa retta PT , a cui va sempre avvicinandosi la PP' quando P' si accosta sempre più a P , fino a confondersi praticamente con essa, dicesi la **retta tangente** al diagramma nel punto P .

Questo diagramma, se pensiamo costruiti di mano in mano nuovi punti aventi ascisse intermedie a quelle segnate, è una linea; essa chiamasi **iperbole equilatera**. Pertanto in ogni tratto di una iperbole vi sono quanti punti si vogliano, perchè ogni valore di x diverso dallo zero ha il suo corrispondente $\frac{1}{x}$ per y , e l'*iperbole equilatera ha in ogni suo punto una retta tangente*.

Al crescere indefinitamente della ascissa, l'ordinata, anche se praticamente non si possa costruire, decresce indefinitamente; e reciprocamente, al decrescere indefinitamente di x , si sa dall'equazione, che la y cresce indefinitamente.

Si suole esprimere questa proprietà dicendo che la iperbole di equazione: $xy = 1$ è una curva la quale **si avvicina assintoticamente all'asse delle x positivo**, o che ammette questa retta come **assintoto**, quando l'ascissa, restando positiva, cresce indefinitamente; e che ammette **come assintoto l'asse delle y positivo** quando l'ascissa restando positiva decresce indefinitamente. Analogamente dicasi per valori negativi della x . La equazione $xy = 1$ si dice anche l'**equazione della iperbole riferita agli assintoti come assi coordinati** cartesiani (ortogonali). Il punto O si dice punto di discontinuità per la iperbole, ossia per $x = 0$ la funzione y dicesi **discontinua** nel punto $x = 0$.

26. — La funzione y rappresentata da: $y = \frac{a}{x}$ ove a è una costante, ha pure per diagramma una iperbole, i cui assintoti sono gli assi coordinati: all'ascissa x' come ordinata corrisponde $\frac{a}{x'}$, invece che $\frac{1}{x'}$.

La funzione $\frac{1}{x}$ è un caso particolarissimo della seguente funzione frazionaria: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (per $a=0$ $b=1$ $c=1$ $d=0$). Consideriamo ora ad es. la equazione: $y = \frac{4x-7}{2x-5}$ (1); questa si può mettere sotto la forma

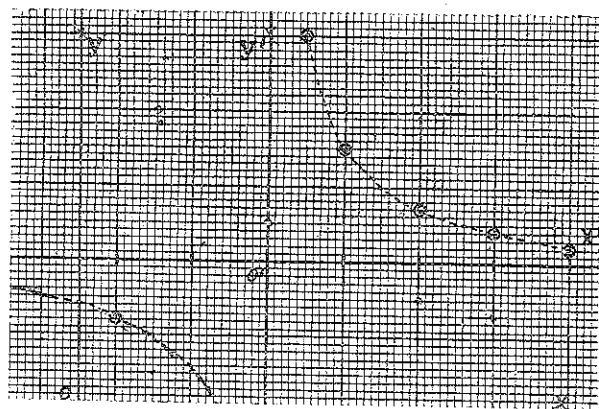


Fig. 39

seguinte: $y = 2 + \frac{3}{2x-5}$ ossia: $y = 2 + \frac{1,5}{x-2,5}$.

Se noi dunque operiamo una traslazione degli assi, trasportandoli parallelamente a se stessi nel punto $O' (2,5 \ 2)$ e poniamo: $y' = y - 2$ $x' = x - 2,5$ la nostra equazione prende la forma: $y' = \frac{1,5}{x'}$ (2).

Questa rappresenta una iperbole equilatera i cui asintoti sono gli assi $O'x'$, $O'y'$. Pertanto la (1) rappresenta una iperbole, e gli assi Ox , Oy sono paralleli agli asintoti, e questi hanno per equazioni rispettivamente $y = 2$, $x = 2,5$. Il diagramma è incontrato dall'asse delle x nel punto di coordinate $x = 0$ $y = 1,4$ e dall'asse delle y alla distanza 1,75.

Esemp. - Si sa dalla fisica che secondo la legge di Boyle il volume di una data massa di gas è in ragione inversa della pressione a cui è sottoposto, rimanendo costante la temperatura. Indicando ora con p la pressione e con v il volume, si ha che: $v = \frac{a}{p}$, essendo a una costante. Infatti se $p' p''$ sono due stati di p , e $v' v''$ gli stati corrispondenti di v , per la legge indicata $v' : v'' = p'' : p'$ donde: $v'' p'' = p' v' = \text{costante}$; ciò che si esprime scrivendo: $v p = a$ essendo a questa quantità costante. Reciprocamente, da $v p = a$ si trae: $v' p' = v'' p''$ donde: $v' : v'' = p'' : p'$. La rappresentazione grafica della legge di Boyle, riguardando v e p come variabili, p l'ascissa e v l'ordinata, è dunque una iperbole equilatera (di solito si considera solo il diagramma situato sull'angolo YOX degli assi positivi), descritta la quale, noi possiamo graficamente determinare v quando sia dato p .

Quanto poi alla determinazione della costante a , ciò si ottiene ricorrendo all'esperimento. Così se a temperatura fissa un vaso a pareti incompressibili contiene ad es. litri 4,3 d'aria e la pressione è in metri: 0,74, la costante $a = 4,3 \cdot 0,74 = 3,182$.

Il diagramma della funzione $v = \frac{3,182}{p}$ ci direbbe che alla pressione di due atmosfere $p = 2 \cdot 0,76 = 1,52$ il volume di quella quantità di aria sarebbe eguale a litri 2,09 circa, valore molto prossimo a quello 2,0935 che si ricaverebbe dal calcolo diretto.

Eserc. 1 - Descrivere il diagramma di equazione: $y = \frac{25}{4x}$ limitandosi a valori positivi di x .

Es. 2 - Determinare graficamente le soluzioni comuni alle due equazioni: $4xy = 25$ $y + 3x = 10$.

Es. 3 - Descrivere la curva di equazione: $yx = 10$ e trovare le ascisse dei punti di intersezione di essa con la retta di equazione: $y + 10x = 35$.

Es. 4 - Descrivere, limitandosi a valori differenti dallo zero la curva di equazione $y = 10 - \frac{1}{x}$.

Coordinate cartesiane ortogonali di un punto nello spazio.

27. — Se nello spazio si fissano tre rette Ox , Oy , Oz a due a due ortogonali, e quindi costituenti un triedro trirettangolo, e su ciascuna di esse si fissa il verso positivo, e si sceglie un segmento u come unità di misura di tutti i segmenti che si considerano nello spazio, si verifica, come nel piano, che ad ogni punto P dello spazio viene a corrispondere una ed una sola terna di numeri reali abc , che sono le misure, rispetto ad u , dei

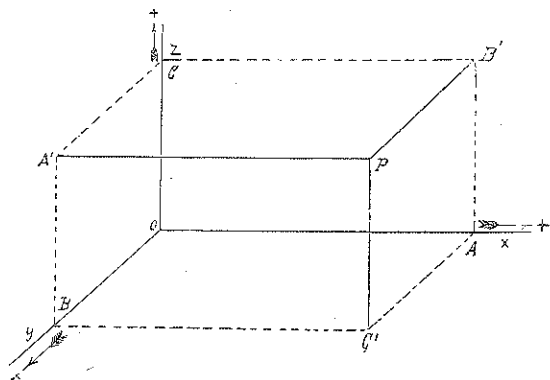


Fig. 40

segmenti PA' , PB' , PC' di incontro delle parallele condotte da P agli assi Ox , Oy , Oz rispettivamente coi piani yoz , zox , xoy . Reciprocamente, ad ogni terna di numeri reali, dati in valore ed in segno, corrisponde un unico punto P dello spazio; così, se per fissare le idee, è data la terna dei numeri reali e pos.: 2 1 e 3, ad essa corrisponde il punto che si ottiene facendo $OA = 2u$, $OB = -u$, $OC = 3u$ e costruendo il parallelepipedo

(rettangolo) che ha per spigoli OA , OB , OC ; il vertice P opposto ad O di esso è il punto richiesto.

Il punto O dicesi *origine*; le rette Ox , Oy , Oz del triedro, rispettivamente *gli assi* xyz ; la terna (abc) dicesi la terna delle coordinate cartesiane di P e propriamente a dicesi la x del punto P , b dicesi la y e c la z di P ; qualche volta a, b, c diconsi anche la prima, seconda, terza coordinata del punto P .

I tre piani determinati dalle rette Ox , Oy , Oz dividono lo spazio in otto triedri trirettangoli, a ciascuno dei quali corrisponde per le coordinate dei rispettivi punti una certa disposizione di segni. Questa disposizione è la seguente: $+++$ pel triedro i cui spigoli hanno tutti lo stesso verso positivo, poi $-++$; $+-+$; $++-$; $---$; $--+$; $+--$; $-+-$; $---$.

Per i punti del piano xoy si ha sempre $z=0$,

per i punti del piano yoz si ha sempre $y=0$,

e per i punti del piano zox si ha sempre $x=0$.

Per i punti dell'asse Oz si ha sempre: $x=0$, $y=0$;

per i punti dell'asse Ox si ha sempre: $y=0$, $z=0$;

e per i punti dell'asse Oy si ha sempre: $z=0$, $x=0$.

Il punto O ha per coordinate $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui prima coordinata x è costante ed eguale ad a , mentre le altre possono variare

comunque, è un piano parallelo al piano yoz e distante da O di un segmento eguale in lunghezza ad a . Ciò si trae direttamente dalla figura 41.

Esprimesi questo fatto dicendo che: $x=a$ è la equazione del piano π parallelo al piano yoz condotto pel punto di prima coordinata $OA=a$.

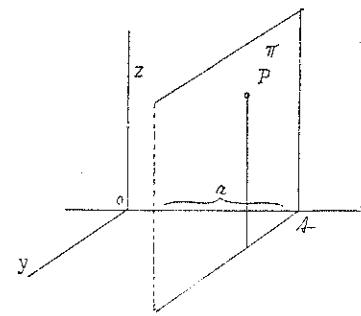


Fig. 41

Eser. 1. — Qual è il luogo geometrico dei punti dello spazio pei quali la seconda coordinata $y = b$? E quale quello dei punti pei quali $z = c$?

Es. 2. — Qual è il luogo geometrico dei punti dello spazio pei quali: $x = a$ $y = b$?

Es. 3. — La equazione: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ serve a determinare il valore di una delle tre incognite, tosto che siano dati i valori di due tra esse. Qual è il valore di z corrispondente ai valori $x = 0$ $y = 0$, e qual è il punto dello spazio, le cui coordinate sono 0, 0 e questo valore?

Es. 4. — Verificare che il luogo geometrico dei punti dello spazio le cui coordinate sono soluzioni della equaz. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ contiene tre punti situati l'uno sull'asse delle x alla distanza a dall'origine, l'altro sull'asse delle y alla distanza b e il terzo sull'asse della z alla distanza c .

Es. 5. — Congiungendo O con P nella figura 41 verificare che: $OP^2 = a^2 + b^2 + c^2$, essendo a , b , c le coordinate del punto P .

Concetto di limite e sue applicazioni geometriche.

28. — Negli *Elementi di Geometria* (*) abbiamo data la seguente definizione: *Se una grandezza A è compresa fra due classi contigue di grandezze ad essa omogenee, la grandezza A dicesi il limite delle due classi.*

In seguito, col postulato della continuità abbiamo stabilito che fra due classi contigue di segmenti OX , OX' della retta esiste un segmento, ed uno solo, OP , che sia compreso fra esse; e di qui abbiamo dedotto che OP è il **limite** delle classi contigue dei segmenti OX OX' .

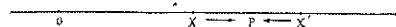


Fig. 42

In tal guisa si è trovato che la circonferenza (retti-

(*) (Parte II pei licei moderni, d. VI n. 76 e pei class. n. 84).

ficata) è il limite dei perimetri, ed il cerchio è il limite delle superficie dei poligoni regolari inscritti e circoscritti ad esso.

E così l'arco circolare (rettificato) è il limite delle spezzate regolari inscritte e circoscritte ad esso; e il settore circolare (superficie del settore) è il limite dei settori poligonalari inscritti e circoscritti.

Negli stessi *Elementi* si sono poi accennate altre figure, le quali sono limiti di classi contigue di grandezze geometriche.

Anche dall' *Algebra* possiamo trarre esempi di grandezze che sono limiti di classi contigue.

Al n. 2 di questi *Complementi* abbiamo visto che si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra i segmenti di una retta, considerati a partire da una comune origine, e i numeri reali, razionali o irrazionali: per questo possiamo considerare i numeri reali come grandezze (*grandezze numeriche*) e far corrispondere a una classe di segmenti la classe dei numeri che li rappresentano, e che ne sono le misure; a un segmento variabile x (cioè una successione di segmenti, di cui uno generico dinotasi con x) un numero variabile x (cioè una successione di numeri, di cui uno qualunque dinotasi con x); a un segmento OP limite di due classi contigue OX , OX' , un numero, limite delle classi contigue di numeri, che sono le misure di OX , OX' ; ecc.

Ad es., come abbiamo visto al n. 1 di questi *Complementi*, il numero: $+\sqrt{2}$ si può riguardare come il limite delle classi di numeri razionali positivi, nella prima delle quali si trovano tutti quelli che elevati al quadrato danno meno di 2, per es.: 1.1, 1.41, 1.414, 1.4142..., e nella seconda tutti quelli il cui quadrato è maggiore di 2, per es. 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143...

Dalla figura 42 risulta che per essere le due classi di segmenti OX , OX' contigue, e OP il loro limite, il segmento variabile XX' (di mano in mano che l'estremo X si accosta a P , pur restando sempre alla sinistra di P ,

e l'estremo X' pure si avvicina a P restando sempre alla sua destra) diventa e si mantiene minore di ogni segmento ε , dato, per quanto piccolo esso sia, o, come si suol dire, *il segmento: XX' diventa infinitamente piccolo*. E siccome si ha sempre: $XX' = XP + PX'$, così a più forte ragione tanto XP che PX' diventano infinitamente piccoli.

Così nel caso della circonferenza rettificata, essendo essa equivalente ad un segmento OP , che è il limite di due classi contigue di segmenti OX , OX' che rappresentano rispettivamente i perimetri dei poligoni regolari inscritti e dei poligoni regolari circoscritti ad essa, possiamo dire che la differenza fra la circonferenza rettificata OP e il perimetro OX di un poligono regolare inscritto (o circoscritto OX') diventa infinitamente piccola, quando il numero dei lati del poligono diventa infinitamente grande ossia diventa e si mantiene maggiore di un numero dato, per quanto grande esso sia.

E inversamente, se si ha un segmento OP tale che la differenza: $OP - OX$ in valore assoluto sia minore di un segmento ε , dato ad arbitrio, vi è un'altra classe di segmenti $OX' > OP$ tale che la differenza: $OP - OX'$, è in valor assoluto minore di ε , essa pure.

Invece di dire che OP è il limite delle classi contigue di segmenti OX , OX' potremo quindi dire che: *il segmento OP è il limite della classe dei segmenti OX (o della classe dei segmenti OX')*.

29. — In ciò che segue, parlando di classi di grandezze, supporremo che queste grandezze siano ordinate, cioè costituiscano una successione, o serie; e, ricordando una analoga dichiarazione fatta negli *Elementi*, invece di dire: *una serie di grandezze* (omogenee): $X_1, X_2, X_3, \dots$ diremo: *la grandezza variabile X* , e le grandezze $X_1, X_2, \dots$ della serie, chiameremo *stati* della grandezza variabile X .

Premesso questo, stabiliamo le seguenti definizioni:

Una grandezza L dicesi *limite di una grandezza variabile X* se, data ad arbitrio una grandezza ε ad essa omogenea, la differenza: $L - X$, in valore assoluto, diviene e rimane, da un certo stato in poi, minore di ε . In altre parole L è il limite della grandezza variabile X se, data la grandezza ε , per quanto piccola questa sia, si può determinare uno stato X_0 della variabile X , tale, che per tutte le grandezze che succedono alla X_0 si verifichi la relazione: $[L - X] < \varepsilon$ (*).

Per esprimere che una grandezza variabile X è tale che, data ad arbitrio una grandezza ε ad essa omogenea, essa diviene e rimane in valore assoluto minore di ε , da un certo stato in poi, diremo che *la grandezza variabile X ha per limite lo zero*. In altre parole, il dire che lo zero è il limite della grandezza variabile X è come affermare che la variabile X diventa infinitamente piccola.

E per esprimere che una grandezza variabile X è tale che, data ad arbitrio una grandezza E omogenea alla X , essa diviene e rimane in valore assoluto maggiore di E da un certo stato in poi, diremo che *la grandezza variabile X ha per limite l'infinito*. In altre parole il dire che l'infinito è il limite della grandezza variabile X è come affermare che X diventa infinitamente grande.

Non è escluso che, data una grandezza variabile X , non esista per essa alcun limite L , nè lo zero, nè l'infinito.

Si noti ancora che col dire che una grandezza diventa infinitamente piccola (o infinitamente grande) non si intende già che sia, in uno stato dato, una grandezza infinitamente piccola (infinitamente grande), ma bensì che la grandezza variabile di cui si parla è tale che da un suo stato determinato X_0 in poi, diviene e si conserva

(*) Il valore assoluto di una differenza come: $L - X$ (cioè $L - X$ se $L > X$ e $X - L$ se $L < X$) dinotasi con: $[L - X]$.

minore (maggiore) di qualsiasi grandezza assegnabile omogenea con la data, per quanto piccola (grande) si sia.

Per indicare che L è il limite della grandezza variabile X si suol scrivere:

$$L = \lim X.$$

Non si dimentichi che questa è una maniera abbreviata di esprimere che:

$$[L - X] < \varepsilon.$$

con tutte le aggiunte, che sappiamo, riguardo alla grandezza ε , e al modo di variare di X .

Eserc. 1. - Qual è il limite delle spezzate regolari inscritte ad un arco AB ; quale è il limite dei settori poligonali inscritti al settore circolare $A\widehat{O}B$?

Es. 2. - Se sulla retta r si prende un segmento OA , indi il consecutivo AB eguale ad OA , e poi si considera la seguente serie di segmenti:

$$OA, OA' = OA + \frac{OA}{2}, OA'' = OA' + \frac{OA}{4}, OA''' = OA'' + \frac{OA}{8}$$

provare che questa serie: $OA, OA', OA'', OA''', \dots$ ha per limite OB .

Es. 3. - La retta r e la retta r' sono due rette distinte fra loro parallele. Sulla retta r' si sceglie un punto O e sulla retta r un punto A che si considerano come fissi; un raggio OX uscente da O si muove con la condizione di dover sempre incontrare in un punto X la retta r passando per gli stati $OX', OX'', OX''', \dots$ tali che gli angoli: $AOX', AOX'', AOX''', \dots$ siano successivamente crescenti. Quale è il limite dell'angolo AOX ?

Es. 4. - Quale è il limite di uno scaloide inscritto in un tetraedro ottenuto col dividerne l'altezza in n parti eguali, quando n cresce indefinitamente? Qual è il limite delle superficie laterali dei prismi inscritti in un cilindro, quando il numero delle loro faccie cresce indefinitamente? Si citino altri esempi di grandezze limiti, relative ai corpi rotondi.

Es. 5. - Dato un segmento AB , sia C' il punto medio di AB , C'' quello di AC' , C''' quello di AC'' , $\dots$; qual è il limite della serie di segmenti: $AC', AC'', AC''', \dots$?

Es. 6. - Se in un quadrato dato si costruisce il quadrato che ha per vertici i punti di mezzo dei suoi lati, e si ripete la medesima costruzione su questo secondo quadrato, e poi sul terzo, e così

di seguito quale è il limite della somma delle aree dei quadrati inscritti successivamente gli uni negli altri, allorchè il numero di essi cresce indefinitamente?

Es. 7. - Se da un punto di uno dei lati di un angolo di 60° si abbassa sull'altro lato una retta perpendicolare e dal piede di questa si abbassa la perpendicolare sul primo lato, e dal piede di quest'ultima un'altra sul secondo lato, $\dots$ e così di seguito qual è il limite della somma delle lunghezze dei segmenti normali così costruiti?

30. - Passando alle grandezze numeriche, stabiliremo, per analogia, le definizioni seguenti: Una successione di numeri, ossia un numero variabile x , o anche una variabile x , ha per limite il numero finito e determinato l , se, dato un numero positivo (ad es. razionale) ad arbitrio, vi è uno stato x_0 della variabile, tale, che per tutti gli stati successivi a questo sia: $[l - x] < \varepsilon$.

Una variabile x ha per limite lo zero, se, dato ε positivo ad arbitrio, per quanto piccolo, a partire da un certo stato x_0 in poi, si ha: $[x] < \varepsilon$.

Una variabile x ha per limite l'infinito, se, dato E positivo ad arbitrio, per quanto grande, a partire da un certo stato x_0 in poi si ha: $[x] > E$.

Ad es. la serie dei numeri decimali: $0,5, 0,55, 0,555, \dots$ di cui un termine generico è: $\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots + \frac{5}{10^n}$ ha per limite: $\frac{5}{9}$. Infatti dato che sia: ad es. $0,0001$, già a partire dal quarto termine $0,5555$ si ha che: $\frac{5}{9} - 0,5555$ ossia:

$$\frac{5}{9} - \frac{5555}{10000} = \frac{1}{18000} < \frac{1}{10000}.$$

E più generalmente, dato ε per quanto piccolo esso sia, si può determinare un n tale che per esso e per tutti gli interi successivi risulti: $\frac{5}{9} - \left(\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots + \frac{5}{10^n} \right) < \varepsilon$. Basti ricordare che la somma dei termini della progressione geometrica in parentesi

$$\text{è uguale a: } \frac{\frac{5}{10} - \frac{5}{10^n} + 1}{1 - \frac{1}{10}}, \text{ ossia a: } \frac{5 - \frac{5}{10^n}}{9} \text{ e quindi che:}$$

$\frac{5}{9} - \left(\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots + \frac{5}{10^n} \right) = \frac{5}{9 \cdot 10^n}$; e perchè questo numero sia minore di ε basta prendere n in modo che risulti $10^n > \frac{5}{9\varepsilon}$.

Ad es. la serie: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$, di cui un termine generico è $\frac{1}{n}$, ha per limite zero, come facilmente si può verificare.

Ad es. la serie dei numeri interi presi in ordine crescente ha per limite l'infinito (*).

Eserc. 1. - Verificare che il numero variabile: $\frac{2+x}{3+x}$ ha per limite 1 quando x cresce indefinitamente per valori positivi. (Si proverà dapprima che la differenza $1 - \frac{2+x}{3+x} = \frac{1}{3+x}$, e poi che, dato ε pos. piccolo ad arbitrio, per ogni valore di x maggiore di $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ questa differenza è minore di ε).

Es. 2. - Quale valore intero si deve dare alla x affinché il numero variabile $\frac{x}{1+x}$, da questo valore di x in poi, differisca dall'unità meno di $\frac{1}{100000}$: verificare che $\frac{x}{1+x}$ col crescere di x per valori positivi ha per limite 1.

Es. 3. - Nell'esempio precedente si diano ad x valori negativi, cioè si consideri la variabile $\frac{z}{z-1}$ e che z varii gradatamente da zero ad 1; si dimostri che prendendo z sufficientemente vicino ad 1 può la frazione $\frac{z}{z-1}$ superare qualunque numero positivo per quanto grande esso sia.

Es. 4. - Data la frazione $\frac{x}{x+1}$ si trovi dapprima il valore attuale di essa per $x=1$, indi si dimostri che per x positivo e

(*) La serie: $\sin \frac{\pi}{2}, \sin 3 \frac{\pi}{2}, \sin 5 \frac{\pi}{2}, \dots$ di cui un termine generico è $\sin (2k+1) \frac{\pi}{2}$ essendo k un intero qualsiasi, non ha nessun limite perchè al di là di qualunque intero k noi troviamo sempre nella serie i valori $+1 - 1$.

avvicinantesi all'unità il valore *limite* di quella frazione è eguale al valore attuale per $x=1$.

Es. 5. - Se x ha per limite l , verificare che $-x$ ha per limite: $-l$.

31. - *Un numero variabile x non può avere simultaneamente due limiti distinti l ed l' .*

Questa proposizione può risguardarsi come una conseguenza dell'altra a noi nota e cioè: date due classi contigue di segmenti $OX OX'$ esiste uno ed un solo segmento OP che sia limite comune delle due classi; basta far corrispondere ad ogni numero reale un segmento della retta contato a partire da una comune origine. Tuttavia per la importanza di questo teorema ne daremo una dimostrazione algebrica.

Suppongasi, se possibile, che: $\lim x = l, \lim x = l'$ e sia: $l' - l = h$; siccome si ha identicamente:

$$(l - x) = h + (l' - x)$$

e poichè ciascuna delle differenze $(l - x)$ ($l' - x$) diviene in valor assoluto minore di qualunque numero positivo ε dato piccolo ad arbitrio, così dovrà essere anche h , che è la loro differenza, minore di ε , ciò che non può essere perchè h è costante. Segue da ciò che le due ipotesi $\lim x = l, \lim x = l'$ sono incompatibili, a meno che sia $h=0$ e quindi $l'=l$.

Se $y_1 y_2 y_3 \dots$ sono stati di una variabile y e similmente $z_1 z_2 z_3 \dots$ sono stati di un'altra variabile z in corrispondenza biunivoca, per *somma* delle due variabili y e z cioè $y+z$ intenderemo la variabile i cui stati sono: $y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3 \dots$. La stessa considerazione vale per i concetti di *differenza, prodotto, quoziente*.

Se due numeri variabili y e z tendono ciascuno ad un limite finito, la somma di essi tende pure ad un limite finito; e questo è eguale alla somma dei limiti dei numeri variabili considerati.

Il teorema vale anche per un dato numero n di variabili maggiore di 2.

Si abbia: $\lim y = a$, $\lim z = b$ e si ponga: $a - y = \varepsilon_1$, $b - z = \varepsilon_2$; saranno $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ numeri variabili che tendono a zero, quando y e z tendono rispettivamente ad a e b . Dalle eguaglianze precedenti si trae che:

$$(a + b) - (y + z) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2;$$

e poichè, la somma $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ tende a zero (*) mentre ε_1 ed ε_2 tendono a zero, si conchiuderà che:

$$a + b = \lim (y + z).$$

In modo analogo si dimostra il teorema:

Il limite della differenza $y - z$ di due variabili y e z le quali hanno per limiti rispettivamente a e b è: $a - b$, cioè la differenza dei limiti.

Lo stesso dicasi del teorema:

Se x è un numero variabile che ha per limite il numero finito l , ed m è una costante, il numero variabile: $m x$ ha per limite: $m l$.

Dimostriamo ora che:

Se due numeri variabili y e z hanno per limiti i numeri finiti a e b , il prodotto: yz ha per limite: ab .

Il teorema vale anche per un dato numero n di variabili maggiore di 2.

Si abbia: $\lim y = a$, $\lim z = b$, e si ponga, come sopra: $a - y = \varepsilon_1$, $b - z = \varepsilon_2$; moltiplicando, avremo che:

$$a \cdot b = (y + \varepsilon_1) (z + \varepsilon_2) = yz + \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 y + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

e quindi: $ab - yz = \varepsilon_1 z + \varepsilon_2 y + \varepsilon_1 \varepsilon_2$

(*) Sia ε'_1 il valore assoluto di ε_1 , ε'_2 quello di ε_2 , $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)'$ quello della somma di ε_1 con ε_2 ; siccome il valor assoluto di una somma è eguale o minore della somma dei valori assoluti degli addendi, così $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)' \leq \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2$. Ora si può sempre trovare un numero pos. δ tale che $\varepsilon'_1 < \frac{\delta}{2}$, $\varepsilon'_2 < \frac{\delta}{2}$; segue da ciò che $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)' < \delta$ ove δ è un numero tendente allo zero; dunque $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ha per limite lo zero.

Si vede che il valore assoluto di: $ab - yz$ può divenire minore di qualsiasi numero positivo dato ad arbitrio, perchè i singoli addendi $\varepsilon_1 z$, $\varepsilon_2 y$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ possono rendersi piccoli quanto si vuole con l'impiccolire di $\varepsilon_1, \varepsilon_2$; perciò: $\lim yz = ab$.

Si prova pure che:

Se z ha per limite b e b è diverso da zero, allora la variabile $\frac{1}{z}$ ha per limite $\frac{1}{b}$.

Basta osservare che: $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ e che di un numero costante l , se si applica ad esso la definizione di limite, si può dire che ha per limite se stesso, in quanto che la differenza $(l - b)$ essendo nulla, è minore di qualsiasi numero pos. ε dato ad arbitrio; quindi $\lim \frac{1}{z} \lim z = 1$ ossia $\lim z \lim \frac{1}{z} = 1$ ed essendo $\lim z = b$ si ha: $\frac{1}{z} = \frac{1}{b}$ c. v. d.

Se y e z sono due numeri variabili che tendono rispettivamente ai limiti finiti a e b , e se b è diverso da zero, il quoziente variabile: $\frac{y}{z}$ ha per limite $\frac{a}{b}$ cioè il quoziente dei limiti a e b .

Basta osservare che: $\frac{y}{z} = y \cdot \frac{1}{z}$, ed applicare le due propos. precedenti.

Retta tangente ad una curva.

32. — Se consideriamo la funzione: $y = x^2$, che rappresenta l'ordinata di una parabola, e diamo alla x un incremento Δx , l'incremento corrispondente Δy è dato, come sappiamo (n. 23) da:

$$\Delta y = (2x + \Delta x) \cdot \Delta x \quad (1)$$

A suo luogo abbiamo già fatto notare che quando Δx tende verso zero, anche Δy tende verso zero, e quindi che il rapporto incrementale: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ che è eguale a: $2x + \Delta x$ col decrescere indefinitamente di Δx differisce da $2x$ tanto poco quanto si vuole.

Ora possiamo dire che:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \quad (2)$$

con l'aggiunta, sempre sottintesa, che sia: $\lim \Delta x = 0$. Ciò significa che la retta PP' si avvicina sempre più alla tangente alla curva nel punto P , a mano a mano che P' si avvicina a P . La retta tangente in P ha per pendenza: $2x$; possiamo quindi dire che la tangente in

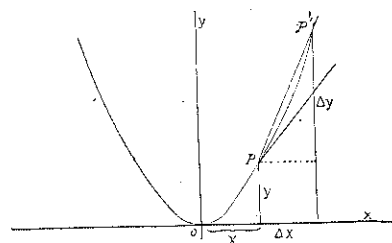


Fig. 43

un punto qualsiasi P alla parabola è il limite della secante variabile PP' quando il punto P' varia, con la condizione di avvicinarsi indefinitamente al punto P , il che equivale a dire, quando le coordinate $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ dif-

feriscono quanto poco si voglia dalle coordinate x , y del punto P .

Se la equazione della parabola fosse: $y = ax^2$ si avrebbe che: $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax$.

E se la equazione fosse: $y = ax^2 + bx + c$ si avrebbe: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x$, e quindi che:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b.$$

In generale: se A e B sono due dati punti di una

curva, e A' è un qualunque punto di essa compreso fra A e B ; e se si considera una secante variabile AA' con l'estremo A fisso, e con l'altro estremo A' variabile, e avvicinandosi indefinitamente ad A nel verso $BA'A$, se la secante stessa si avvicinerà indefinitamente ad una retta fissa AT in modo cioè che l'angolo: $\widehat{A'AT}$ abbia per limite lo zero, allora la retta AT dicesi *retta tangente alla curva nel punto*

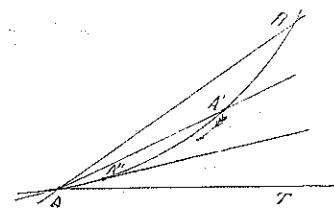


Fig. 44

A . E il punto A dicesi *punto di contatto* della tangente con la curva data.

In questo caso la *pendenza della retta secante* ha per limite la *pendenza della retta tangente*.

Il diagramma di una funzione $f(x)$, continua in un dato intervallo, (salvo punti speciali, come nel caso di $y = \frac{1}{x}$) dicesi *curva intuitiva*, se essa può essere descritta dal movimento di un punto, come quella tracciata nella fig. 44, ossia se è tale che in ogni punto A vi sia la tangente, e le tangenti nei punti A, A' vicinissime tra loro siano pure vicinissime, tali cioè che il loro angolo tenda a zero quando A' si avvicina indefinitamente ad A .

Ad es. la pendenza della tangente in un punto (x, y) della parabola $y = x^2$ è: $2x$, cioè una funzione continua di x ; la parabola quindi è una curva intuitiva. Così per l'iperbole $xy = 1$ la pendenza della tangente è: $-\frac{y}{x}$ e quindi anche la iperbole equilatera (fatta eccezione del punto di ascissa $x = 0$) è una curva intuitiva.

Limite del rapporto fra un arco di circolo e la sua corda (*)

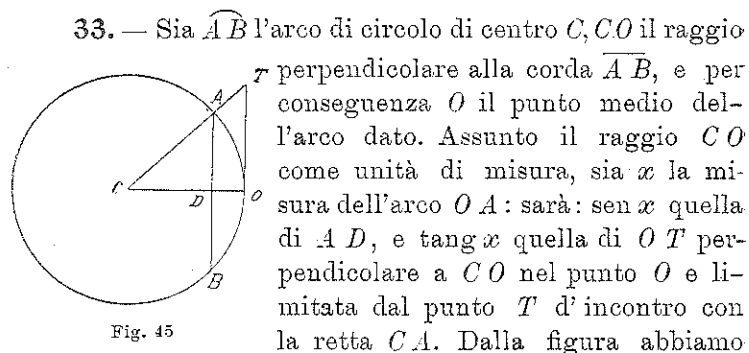


Fig. 45

33. — Sia $\widehat{AB}$ l'arco di circolo di centro C , CO il raggio r perpendicolare alla corda $\overline{AB}$, e per conseguenza O il punto medio dell'arco dato. Assunto il raggio CO come unità di misura, sia x la misura dell'arco OA : sarà: $\sin x$ quella di AD , e $\tan x$ quella di OT perpendicolare a CO nel punto O e limitata dal punto T d'incontro con la retta CA . Dalla figura abbiamo

$$\text{triang. } CDA < \text{sett. circ. } ACO < \text{triang. } COT$$

e per regole note:

$$\text{triang. } CDA = \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x, \text{ sett. circ. } ACO = \frac{1}{2} 1 \cdot x$$

$$\text{triang. } COT = \frac{1}{2} \tan x$$

però: $\sin x \cos x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$

ossia: $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (1)$

Ma quando x decresce indefinitamente e tende a zero, $\cos x$ tende ad 1, e dovendo essere $\frac{x}{\sin x}$ sempre com-

(*) Si suppone che, secondo l'ordine dei programmi, siano state già definite le funzioni circolari.

preso fra due numeri variabili che tendono entrambi verso 1 sarà:

$$\lim \frac{x}{\sin x} = 1 \quad (2)$$

al decrescere indefinitamente di x .

Si ha quindi anche: $\lim \frac{2x}{2\sin x} = 1$, al tendere di x verso zero; pertanto, osservando, che $2x = \widehat{AB}$ e $2\sin x = \overline{AB}$, avremo che:

$$\lim \frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}} = 1$$

quindi il limite del rapporto fra un arco di circolo e la sua corda è eguale all'unità.

Dalla (1) si deduce anche, dividendo per $\tan x$,

$$\cos^2 x < \frac{x}{\tan x} < 1$$

donde: $\lim \frac{x}{\tan x} = 1$, quando: $\lim x = 0$.

Derivata di una funzione.

34. — Data la funzione: $y = f(x)$, all'incremento Δx di x corrisponda l'incremento Δy di y , cosicchè: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ e quindi:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (1)$$

Se col tendere di Δx verso zero, anche Δy tende verso zero, ciò vorrà dire che il punto P' di coordinate $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ tenderà a coincidere col punto P , di coordinate x ed y , cioè che la funzione y è continua nel punto (x, y) .

Dalla (1) si ha: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$

ed anche:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (3)$$

facendo: $x + \Delta x = x_1$, $x = x_0$. Questo rapporto è la *pendenza* della retta che unisce P con P' .

Infatti la retta che passa pel punto x_0, y_0 e di pendenza a ha per equazione $y - y_0 = a(x - x_0)$ (n. 21).

E se in essa è situato il punto di coordinate x_1, y_1 , si deve avere: $y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0)$; ma siccome nel caso nostro $y_1 = f(x_1)$, $y_0 = f(x_0)$, così si ha che:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \quad (4)$$

Se il rapporto incrementale ha un limite determinato, vale a dire se la pendenza della retta PP' ha un limite, ciò vorrà dire che in P esiste la tangente alla curva rappresentata dalla $y = f(x)$.

Il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per Δx tendente verso zero, quando esso esiste, si dice la *derivata* di $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 , o se x è qualunque dicesi la *derivata* di $f(x)$ nel punto generico di ascissa x . Se dinotiamo con y' questo limite allora scriveremo:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Si osservi che Δx e Δy sono delle differenze, cioè la differenza delle ascisse e quella delle ordinate di due punti A e B . Se Δx tende a zero per esprimere questa particolarità della differenza, invece che Δx (coll'aggiunta che $\lim \Delta x = 0$) si scriverà solamente: dx . Il simbolo: dx dinota dunque Δx in quanto Δx tende a zero.

Se y' ha valore finito e determinato, il prodotto $y' \cdot dx$ si dinota con: dy sicchè: $dy = y' \cdot dx$ tende a zero insieme con dx . I simboli: dy, dx chiamansi *differenziali*: il differenziale di una variabile è dunque un incremento della variabile che tende a zero. Gli è perciò

che la derivata di $f(x)$ si chiama anche il *quoziente differenziale* di $f(x)$ relativo al valore di x che si considera e si scrive:

$$(5) \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'.$$

Geometricamente, la derivata è la pendenza (o il coefficiente angolare) della retta tangente nel punto (x, y) alla curva immagine della funzione: $y = f(x)$.

Il concetto di derivata di una funzione $y = f(x)$ presuppone che $f(x)$ sia variabile. Se y è costante cioè se $y = a$ possiamo estendere il concetto di derivata dato più sopra, convenendo di dire che la derivata di una costante è zero. Ciò si può giustificare osservando che il diagramma della funzione $y = a$ è una retta parallela all'asse delle x , distante di a unità dall'asse stesso, e quindi che la pendenza di questa retta è zero. D'altronde si può anche dire che se y è costante, Δy è sempre zero, ancor prima che Δx impiccolisca fino a zero, epperò $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ e tale è pure il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per Δx tendente a zero.

Adunque: La derivata di una costante è zero.

Derivata di una funzione di 1° e 2° grado, di $a : x$ e di una funzione intera di grado n .

35. — Derivata della funzione lineare.

Per la funzione: $y = ax + b$ abbiamo: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$; in questo caso è costante il rapporto incrementale, ed eguale ad a . Tale sarà dunque altresì il suo limite per Δx ten-

dente a zero. Pertanto: $\frac{dy}{dx} = a$. Dunque: *La derivata di una funzione lineare è una costante, cioè il coefficiente di x .*

36. — Derivata della funzione quadratica.

Consideriamo dapprima la funzione: $y = ax^2$. Qui si ha che: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x$; segue da ciò che per Δx tendente a zero: $\frac{dy}{dx} = 2ax$. Come abbiamo visto, la funzione $y = ax^2$ ha per diagramma una parabola; la quantità $2ax$ è la pendenza della tangente alla parabola nel punto di ascissa x .

Più generalmente, consideriamo la: $y = ax^2 + bx + c$; in tal caso si ha che: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b + a\Delta x$; segue da ciò che: $\frac{dy}{dx} = 2a + b$. Pertanto:

La derivata della funzione: $y = ax^2 + bx + c$ è la funzione lineare $2ax + b$.

37. — Derivata della funzione: $y = \frac{a}{x} = ax^{-1}$.

Abbiamo visto che essa ha per diagramma una iperbole equilatera. In questo caso: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{y}{x} - \frac{\Delta y}{x}$. Escludendo il valor zero di x , per Δx tendente a zero abbiamo: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -ax^{-2}$. Pertanto:

La derivata della funzione $y = ax^{-1}$ è: $-ax^{-2}$, per x diverso da zero.

38. — Derivata di una somma; di una differenza.

Se y e z sono due funzioni di x e si pone: $u = y + z$, si ha che u è pure una funzione di x . Am-

messo che per ciascuna di queste funzioni componenti la u si sappia derivare, ci proponiamo di determinare la derivata di u .

A tal uopo osserviamo che dando ad x l'incremento Δx e supponendo che corrispondentemente y e z ricevano gli incrementi Δy , Δz , e u l'incremento Δu , abbiamo che: $u + \Delta u = (y + \Delta y) + (z + \Delta z)$ e quindi: $\Delta u = \Delta y + \Delta z$, e infine $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x}$. Segue da ciò, per il teorema sul limite della somma, che:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

Questa dimostrazione si può estendere al caso che u sia la somma di n funzioni, essendo $n > 2$. Pertanto:

La derivata della somma di n funzioni è eguale alla somma delle derivate degli addendi.

Da questa proposizione deducesi la seguente:

La derivata di una differenza è eguale alla differenza delle derivate dei suoi termini.

39. — Derivata di un prodotto; di un quoziente.

Se $u = y \cdot z$, si ha che: $u + \Delta u = (y + \Delta y) \cdot (z + \Delta z)$ e quindi: $\Delta u = z \Delta y + y \Delta z + \Delta y \cdot \Delta z$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = z \frac{\Delta y}{\Delta x} + y \frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x$$

e passando al limite:

$$\frac{du}{dx} = y \frac{dz}{dx} + z \frac{dy}{dx}, \text{ cioè:}$$

La derivata del prodotto di due funzioni è eguale alla somma dei prodotti di ciascuna di esse per la derivata dell'altra.

Volendosi la derivata del quoziente $u = \frac{y}{z}$ si osserverà anzitutto che: $u + \Delta u = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z}$ e quindi che:

$$\Delta u = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z} - \frac{y}{z} = \frac{z \Delta y - y \Delta z}{z(z + \Delta z)}, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{z \frac{\Delta y}{\Delta x} - y \frac{\Delta z}{\Delta x}}{z^2 + z \Delta z}$$

Col tendere di Δx a zero, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ tendono rispettivamente a $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$; allora siccome il numeratore del secondo membro tende verso: $z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx}$, mentre il denominatore tende verso z^2 così abbiamo:

$$\frac{du}{dx} = \frac{z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx}}{z^2} \text{ e quindi:}$$

La derivata di un quoziente è eguale ad una frazione il cui denominatore è il quadrato del denominatore del quoziente stesso, e il numeratore è la derivata del numeratore moltiplicata pel denominatore, meno il prodotto del numeratore per la derivata del denominatore.

40. — Derivata della funzione $y = ax^n$.

In questo caso abbiamo che:

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^n = a \left\{ x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n \right\}$$

da cui:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right)$$

e quindi:

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$$

donde: la derivata di una funzione ax^n è eguale a nax^{n-1} .

Eserc. — Si verifichi che la derivata di ax^n è: nax^{n-1} considerando prima ax^2 come prodotto di ax con x , poi ax^3 come prodotto di ax^2 con x ecc. poi ax^n come prodotto di ax^{n-1} con x .

Si è visto che quando una funzione $f(x)$ in un punto P del suo diagramma ha un massimo, i valori y_1 e y_2 nei punti vicini a P da una parte e dall'altra di P sono minori di y ; e analogamente, se nel punto P' la funzione ha un minimo i valori y'_1 e y'_2 vicini a P' da una parte e dall'altra sono maggiori di questo minimo. Segue da ciò che le tangenti in P e in P' al diagramma sono parallele all'asse delle x e perciò la pendenza loro è zero. Pertanto possiamo dire:

La derivata di una funzione in un punto nel quale la funzione stessa ha un massimo od un minimo, è eguale a zero.

41. — Derivata della funzione intera di grado n :

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + px + q$$

Applicando la regola precedente noi abbiamo:

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} + (n-1)bx^{n-2} + \dots + p$$

Ad es. se $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 9$ si ha senz'altro che: $\frac{dy}{dx} = 15x^2 - 8x + 3$.

La regola del n. 40 per determinare la derivata della funzione ax^m per n intero positivo vale anche se n è intero e negativo, frazionario positivo o negativo.

Intanto abbiamo data la dimostrazione nel caso $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$ ossia $y' = -ax^{-2}$ (n. 37), se supponiamo vera la regola per $n = m-1$ la si dimostra per $n = m$.

Infatti è: $y = ax^{-m} = ax^{-(m-1)-1}$

e quindi applicando la regola del prodotto (n. 39) si ha:

$$y' = -(m-1)ax^{-(m-1)-1} - 1x^{-1} - x^{-2}ax^{-(m-1)}$$

$$\text{ossia } y' = -(m-1)ax^{-m-1} - ax^{-m-1} = -max^{-m-1}$$

e siccome la regola è vera per $m = -1$ e se vale per $m-1$ vale anche per m , essa è vera in generale per n intero e negativo.

Sia ora n un numero frazionario positivo, ad es. $n = \frac{1}{2}$, cioè $y = ax^{1/2} = a\sqrt{x}$

Poniamo $z = \sqrt{x}$ onde $x = z^2$ quindi $y = az$ da cui

$$\frac{dx}{dz} = 2z, \quad \frac{dy}{dz} = a$$

onde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2z} = \frac{a}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} a x^{-1/2}$$

Se n è frazionario e negativo, ad es. $n = -\frac{1}{2}$ cioè
 $y = a x^{-1/2} = \frac{a}{\sqrt{x}}$, posto $z = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ossia $x = \frac{1}{z^2}$ e $y = a z$ si ha:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-2z}{z^4} = -2z^{-3} \quad \frac{dy}{dz} = a$$

quindi
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2z^{-3}} = -\frac{a}{2} \frac{1}{\frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{2} a x^{-3/2}$$

Eserc. - Si dimostri che solo $y = a x^{\pm \frac{m}{n}}$ si ha:

$$y' = \pm \frac{m}{n} a x^{\pm \frac{m}{n} - 1} \text{ assumendo prima } m = 1.$$

Derivata di $\sin x$, di $\cos x$ e di $\tan x$.

42. — Sia l'arco $x = \widehat{OA}$ e si intendano tutti i segmenti della figura misurati col raggio CO , assunto come unità, sicchè:

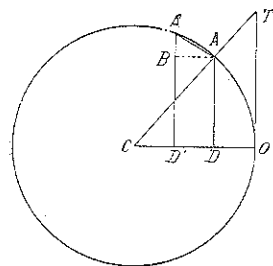


Fig. 46

$\overline{AD} = \sin x, \overline{CD} = \cos x,$

$\overline{OT} = \tan x$. Se $y = \sin x$ e diamo all'arco x l'incremento $\Delta x = \widehat{AA'}$ allora $A'B$ rappresenta l'incremento Δy . Segue da ciò che la derivata di $\sin x$ è il limite del rapporto:

$$\frac{\overline{BA'}}{\widehat{AA'}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ma si può scrivere: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}} : \frac{\widehat{AA'}}{\overline{AA'}}$ e osservare anzitutto che il

rapporto: $\frac{\widehat{AA'}}{\overline{AA'}}$ ha per limite 1 (n. 34). E perchè nel

triangolo rettangolo $A'BA$ il cateto $\overline{BA'}$ è eguale all'ipotenusa $\overline{AA'}$ pel coseno dell'angolo compreso $\widehat{BA'A}$, potremo intanto concludere che:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \cos \widehat{BA'A} : 1 = \lim \cos \widehat{BA'A},$$

essendo il limite del quoziente eguale al quoziente dei limiti dei suoi termini. D'altra parte col tendere di Δx verso zero il punto A' tende ad avvicinarsi indefinitamente ad A cosicchè la corda variabile AA' tende a divenire la tangente in A al cerchio. Possiamo dunque considerare l'arco AA' ridotto a tale stato di piccolezza da potersi ritenere AA' tangente al cerchio e quindi perpendicolare al raggio CA ; ma allora l'angolo $\widehat{BA'A}$ e l'angolo $\widehat{ACD}$ sono fra loro eguali, avendo i loro lati rispettivamente perpendicolari. Ne risulta che:

$\lim \cos \widehat{BA'A} = \cos \widehat{ACD} = \cos \widehat{OA} = \cos x$. Pertanto:

La derivata della funzione $y = \sin x$ è: $\cos x$.

Per determinare la derivata di $y = \cos x$ basterà osservare che $y = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$; essendo dunque:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{dx} = \frac{d \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$= -\sin x$, perchè: $d \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = dx$, (n. 34 e 39) ne viene che: La derivata della funzione $y = \cos x$ è: $-\sin x$.

E per la tangente abbiamo per la regola di derivazione del quoziente:

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{d \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{dx} = + \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La derivata di $y = \operatorname{tang} x$ è eguale a: $+\frac{1}{\cos^2 x}$.

Esercizi.

Trovare la derivata delle funzioni:

$$2x^2 - 5x^3 \quad \frac{x+3}{2} \quad \frac{x^3+x}{5} \quad \frac{x^3}{3} \quad (x+2) \quad (x+1)$$

$$\sqrt[3]{x}, \quad \sqrt[3]{x^2}, \quad \sqrt{2-x}, \quad \sqrt{4-x^2}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 2x + 3\sqrt{x} + 4, \quad \frac{1}{2x+3}$$

$$\frac{7}{(3x+1)^2}, \quad \frac{4x+2}{x}, \quad \frac{5x^2-2x+1}{x^2}$$

$$\operatorname{cotg} x \quad \sec x \quad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

Interpretazioni geometriche e meccaniche della derivata

43. — *Equazione della tangente ad una curva $y=f(x)$ in un dato suo punto.*

Abbiamo già risolto questo problema nel caso della parabola e dell'iperbole equilatera.

In generale, se la funzione $y=f(x)$ è di quelle che ammettono la derivata per i valori di x che si considerano, la equazione della retta tangente nel punto: (x_1, y_1) è della forma seguente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (\text{N. 21})$$

ove con m si dinota la pendenza cioè il valore della derivata $\frac{dy}{dx}$ nel punto di ascissa x_1 .

Ad es. data la curva: $y=x^2-4x+3$ vogliasi la equazione della retta tangente nel punto $(4, 3)$ che come facilmente si verifica appartiene alla curva. Qui abbiamo: $\frac{dy}{dx} = 2x-4$ e per $x_1=4$ $\frac{dy}{dx}$ assume il valore $m=4$; pertanto: $y-3=4(x-4)$ è la equazione della tangente cercata.

La equazione della tangente nel punto $(2, -1)$ che pure giace sulla curva $y=x^2-4x+3$ è invece:

$$y+1=0, \quad (x-2), \quad \text{cioè } y=-1$$

che è la equazione della parallela all'asse delle x e che incontra l'asse della y nel punto $(0, -1)$.

Es. 1 - *Equazione della tangente al circolo: $x^2+y^2=5^2$, nel punto di ascissa 3, e quindi di ordinata 4 (es. 6 n. 23). Si ha $y^2=25-x^2$ e quindi $(y+\Delta y)^2=25-(x+\Delta x)^2$ da cui riducendo:*

$$2x \frac{\Delta y}{\Delta x} + \Delta y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = -(\Delta x + 2x)$$

e al limite: $2y \frac{dy}{dx} = -2x$, cioè: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$:

per $x=3$ $y=4$ la derivata assume il valore: $-\frac{3}{4}$; perciò la equazione della tangente nel punto $(3, 4)$ è, $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$ od anche $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$.

Il circolo è, come si sa, una curva intuitiva, cioè descritta dal movimento di un punto, e ciò risulta pure dal valore della derivata: $-\frac{x}{y}$ che è una funzione continua (pag. 67).

Es. 2 - *La tangente alla parabola: $y=3x^2$ nel punto $x=2$ e quindi $y=12$ è la retta di equazione: $y=12(x-1)$.*

Es. 3 - *La tangente all'iperbole: $y=\frac{1}{x}$ nel punto $(2, \frac{1}{2})$ ha per equazione: $y=-\frac{1}{4}x$.*

Es. 4 - *Determinare la tangente nel punto di ascissa $x=3$ alle curve:*

$$y=3x^2-2, \quad y=\frac{3}{x}-1, \quad y=\sqrt{4-x^2}$$

$$y=x^3, \quad y=x^3+\frac{1}{x}$$

Dimostrare che sono curve intuitive.

44. — Velocità e accelerazione.

Se x è la misura di una durata di tempo in secondi, e y lo spazio (cammino) percorso (in metri) da un mobile, secondo una determinata legge del tempo x , allora y è una funzione del tempo. Se il tempo x aumenta di Δx secondi, lo spazio y aumenterà di Δy metri: e il quoziente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è la velocità media del mobile nell'intervallo di tempo Δx . In generale a diversi intervalli Δx corrispondono diverse velocità medie; allorché $\lim \Delta x = 0$ il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende verso la derivata:

$\frac{dy}{dx}$ e questa dicesi la *velocità del mobile nell'istante x* considerato.

Esemp. 1 - Se la equazione del moto è: $s = a + bt$, ove t sta in luogo di x ed s in luogo di y , allora si ha che: $\frac{ds}{dt} = b$: cioè la velocità è costante, e quindi il moto è uniforme.

Es. 2 - Se la equazione del moto è: $s = \frac{1}{2}gt^2$ (moto uniformemente accelerato partendo dalla quiete) si ha che: $\frac{ds}{dt} = gt$ che è la velocità nel mobile nell'istante t : essa è proporzionale a t , essendo $g = 9,81$ il coefficiente di proporzionalità.

Es. 3 - Se s e t sono dati per un treno da una tabella, così che a determinati tempi $h, h', h'', \dots$ in ore e minuti primi corrispondano determinati valori di s in chilometri ed ettometri, si portino i tempi t a cominciare dall'ora h come ascisse sulla carta millimetrata e quelli di s come ordinate su una retta perpendicolare all'asse delle t e si segni la curva passante per i punti (ts) . La pendenza della tangente alla curva in un dato punto ci darà la velocità del treno nell'istante ad esso corrispondente, in una unità di misura dipendente dalle unità di misura di t ed s .

Si potranno determinare i punti in cui la velocità è zero, cioè quando il treno è fermo. Naturalmente la curva nella figura non può essere tracciata che empiricamente, avendo noi solo che un limitato numero dei suoi punti, e quindi per avere la velocità con

esattezza bisognerebbe avere l'equazione della curva stessa. Sulla stessa carta millimetrata si portano corrispondentemente ai tempi (ascisse) le velocità come ordinate: si ha allora un'altra curva; e la pendenza della tangente in un dato punto P di questa curva è ciò che si chiama *accelerazione* del punto P nell'istante considerato.

Se noi poniamo: $\frac{ds}{dt} = v$, l'accelerazione è data dall'espressione derivata: $\frac{dv}{dt}$, la quale spesso si dinota col simbolo: $\frac{d^2s}{dt^2}$ che leggesi: *derivata seconda di s rispetto a t* .

Valutazione approssimata di un'area piana.

45. — Nell'es. 1 del n. 5 abbiamo proposto di determinare l'area di un rettangolo, di cui sono date le coordinate dei vertici, mediante l'uso della carta quadrettata: l'area di quel rettangolo è data dal numero dei quadrati contenuti in quel rettangolo.

Così se si ha un poligono, ad es. un quadrangolo $ABCD$, per avere l'area di esso, sulla carta quadrettata, di cui ox, oy sono due rette perpendicolari, si conta il numero dei quadrati tutti interni al quadrangolo, (che nella fig. 47 hanno per lato mezzo cm.) e questo numero m dà, con una approssimazione spesso ritenuta apprezzabile, l'area del quadrangolo medesimo. E se per unità di misura si prende la metà di quel lato (un quarto di cm.), oltre al numero: $4m$ dei quadrati che hanno questo nuovo lato ($1/4$ di cm.), e sono contenuti nei primi m

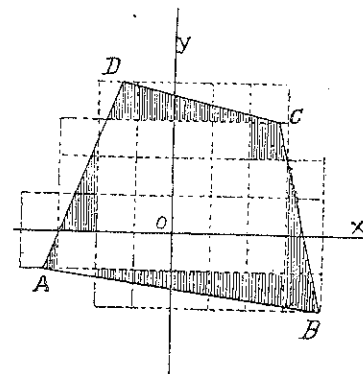


Fig. 47

quadrati sopra considerati, avremo altri quadrati (col lato di $1/4$ di cm.) contenuti nei quadrati rimanenti di lato di mezzo cm.; quadrati, che in parte sono interni ed esterni ad $ABCD$. Così si avrà un numero di quadrati (con $1/4$ di cm. di lato) la cui somma è ancora più approssimata all'area del quadrangolo.

Il ragionamento vale per ogni unità abbastanza piccola, rispetto al quadrangolo dato (p. es. si può prendere nella fig. 1 mm. come lato del quadrato, ed allora non si ha che da contare i mmq. contenuti nel quadrangolo dato).

Se si indica con s la somma dei quadrati interni, e con S quella dei quadrati contenuti in s e dei qua-

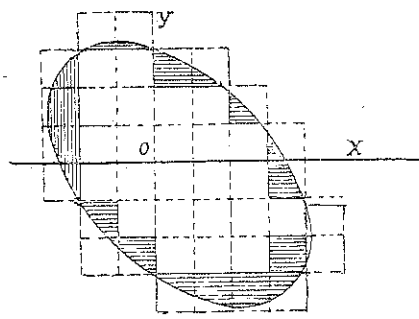


Fig. 48

drati che sono in parte interni e in parte esterni al quadrangolo, si suol prendere come area più approssimata anche la somma: $\frac{S+s}{2}$ (media aritmetica di s ed S).

In generale, se si ha una superficie con contorno curvilineo, se

ne determina l'area approssimata nello stesso modo.

Si può determinare l'area approssimata di una superficie piana con altro procedimento.

Data ad es. una parabola, si voglia l'area approssimata della superficie racchiusa dalla curva limitata al punto O , dall'asse delle x e dall'ordinata φF (fig. 49): tale superficie, per la parabola si chiama *segmento parabolico*. A tal uopo si divida OF in n parti eguali (nella figura sono 6) OA, AB, BC, CD, DE, EF e poi punti di divisione si tirino le ordinate $\alpha A, \beta B, \dots$ e si costruiscano i rettangoli: $\alpha ABA'', \beta BCB'', \gamma CDC'', \delta DED'', \varepsilon EFF''$, e i rettangoli $O'OA\alpha, A'AB\beta, B'BC\gamma, C'CD\delta, D'DE\varepsilon$,

$E'EF\varphi$. Noi vediamo subito che i rettangoli della prima serie sono tutti interni al segmento parabolico, mentre gli altri hanno ciascuno un triangolo (parabolico) esterno; ad esempio $O'O.1\alpha$ ha come esterno il triangolo $O'O\alpha$, il cui lato $O\alpha$ è un arco della curva. Indicando anche qui con s la somma dei primi rettangoli e con S quella dei secondi, potremo assumere S oppure s come area approssimata del segmento parabolico: $OF\varphi$; oppure, con maggiore approssimazione: potremo, assumere: $\frac{S+s}{2}$. Diciamo con maggiore approssimaz., perchè se si ha: $S = s + m$, nel qual caso, prendendo S oppure s come area, l'errore (in più od in meno) è dato dal valore assoluto di m , nel terzo caso invece, essendo: $\frac{S+s}{2} = s + \frac{m}{2}$, l'errore è al più in valore assoluto la metà del primo.

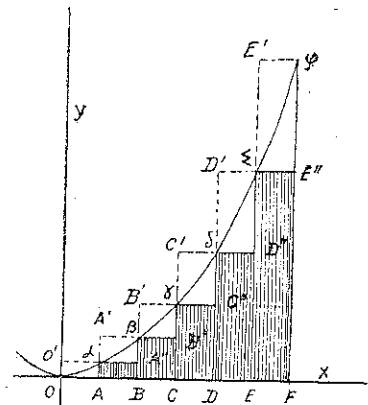


Fig. 49

Ciò premesso, consideriamo la parabola di equazione: $y = x^2$, e indichiamo con h la parte ennesima di OF ; alle ascisse: $h, 2h, 3h, \dots, nh$ corrisponderanno le ordinate: $h^2, (2h)^2, (3h)^2, \dots, (nh)^2$, e quindi la somma dei primi rettangoli sarà data da:

$$s = h \cdot h^2 + h \cdot (2h)^2 + \dots + h \cdot ((n-1)h)^2$$

mentre:

$$S = h \cdot h^2 + h \cdot (2h)^2 + \dots + h \cdot ((n-1)h)^2 + h \cdot (nh)^2$$

$$\text{ossia: } s = h^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2) =$$

$$= h^3 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$S = h^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) = \\ = h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pertanto avremo:

$$\frac{S+s}{2} = \frac{nh^3}{6} (2n^2 + 1), \text{ e ricordando che: } nh = OF$$

$$\text{avremo: } \frac{S+s}{2} = \frac{OF^3}{3} + \frac{OF^3}{6n^2}; \text{ e l'errore è in questo}$$

caso rappresentato da: $\frac{OF^3}{6n^2}$, da cui si vede che l'errore è tanto più piccolo quanto più grande è il numero n delle parti in cui è stato diviso OF .

Che se si considera la S come valore approssimato, allora si ha: $S = s + \frac{OF^3}{n}$, con un errore al più di: $\frac{OF^3}{n}$

47. — Un altro metodo per determinare l'area approssimata di una superficie piana, ad es. di quella li-

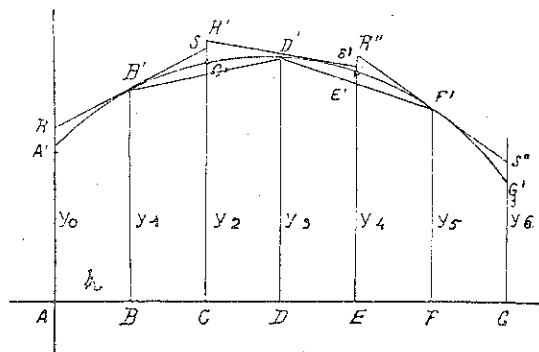


Fig. 50

mitata dalla curva $A'B'C'D'E'F'G'$, dall'asse delle x e dalle ordinate AA', GG' (fig. 50) è il seguente:

Dividasi AG in $2n$ parti eguali, (nella figura $n=3$), e pei punti di divisione si conducano le ordi-

nate: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n}$. Alle estremità delle ordinate dispari: $B', D', F', \dots$ conducansi le tangenti alla curva, e si considerino i trapezi, come: $ARSC, \dots$ l'insieme dei quali comprende la superficie data, mentre l'insieme dei trapezi $A'ABB', B'BCC', \dots$ è interno alla superficie stessa.

I primi trapezi hanno rispettivamente per area:

$$2hy_1, 2hy_3, 2hy_5, \dots, 2hy_{2n-1},$$

ove: $h = AB = BC = \dots$. Indicando con S la loro somma: avremo:

$$S = 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1})$$

La somma invece dei secondi trapezi $B'BDD', \dots$ eccettuati i due trapezi estremi è:

$$2h \left(\frac{y_1 + y_3}{2} + \frac{y_3 + y_5}{2} + \dots + \frac{y_{2n-3} + y_{2n-1}}{2} \right),$$

ossia: $2h(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) - h(y_1 + y_{2n-1})$; e aggiungendo i due trapezi estremi:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2} h$$

la detta somma è: $s = S + \frac{h}{2} (y_0 + y_{2n} - y_1 - y_{2n-1})$.

Ne consegue che:

$$S = s + \frac{h}{2} \left\{ (y_1 - y_0) + (y_{2n-1} - y_{2n}) \right\}$$

Se dunque si considera la S come area approssimata della nostra superficie, si ha che:

$$S = s + \frac{AG}{4n} (y_1 - y_0 + y_{2n-1} - y_{2n}).$$

Nel caso della nostra figura:

$$S = s + \frac{AG}{12} (y_1 - y_0 + y_5 - y_6).$$

Per misurare l'area di una superficie piana come quella ora considerata, si usano nella pratica degli strumenti appositi detti: *planimetri*.

Misura esatta di un' area piana.

48. — I due ultimi metodi indicati ai n. 46, 47 ci danno anche il modo di calcolare esattamente l'area di una superficie racchiusa da una curva piana, quando sia conosciuta la equazione $y = f(x)$ di essa.

Difatti nel primo caso (fig. 49), quando n aumenta indefinitamente, noi sappiamo che dato il rettangolo, dato dalla differenza di due rettangoli, l'uno diremo così esterno, l'altro interno, formati dalle stesse ordinate (come ad es. dei rettangoli $A'AB\phi$ e $zAB\lambda''$, le cui basi diventano infinitamente piccole) a misura che $h = OA = AB = \dots$ diminuisce indefinitamente, è infinitesimo; e nel secondo caso (fig. 50), cioè nel caso dei trapezi $A'ACC'$, $RACS\dots$ formati con le stesse ordinate, col crescere di n , la loro differenza diventa piccola quanto si vuole, perchè A' e C' al limite si confondono con B' ecc.

Nel caso speciale del *segmento parabolico*, essendo la equazione della curva: $y = x^2$, indicando con L l'area esatta di esso, dalla formola trovata al n. 46 si ha:

$$\lim \frac{S+s}{2} = L = \frac{\overline{OF^2}}{3}.$$

Questo risultato si ottiene anche dalla formola:

$$S = h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ cioè:}$$

$$S = \frac{\overline{OF^3}}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{\overline{OF^3}}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}$$

osservando che: $\frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

e che per n crescente indefinitamente:

$$\lim \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 1 \cdot 2 = 2$$

si ha:

$$\lim S = L = \frac{\overline{OF^3}}{3} = \frac{x^3}{3} = \frac{xy}{3}$$

Il *segmento parabolico* ha per area un terzo del rettangolo di lati x ed y , essendo xy le coordinate del secondo estremo φ dell'arco di esso ed essendo il primo estremo l'origine delle coordinate.

Ritornando al caso generale, se indichiamo con: $y = f(x)$ la equazione della curva, (fig. 51) della quale si vuole l'area $ACDB$, compresa fra l'arco CD e le ordinate $f(a)$ $f(b)$ dei punti C e D , di ascisse a e b si divida AB in n parti eguali,

e si ponga: $\frac{AB}{n} = h$. Essendo $f(a)$

l'ordinata del punto C , $f(a+h)$ sarà quella del punto M , la cui ascissa è: $OR = a + h$, $f(a+2h)$ quella del punto N , la cui ascissa è: $OS = a + 2h$, ecc.

L'area del rettangolo $RMSQ$ sarà allora: $h \cdot f(a+h)$, ecc., e il limite della somma di questi rettangoli quando n cresce indefinitamente sarà l'area della superficie data. È però necessario, come nel caso della parabola, di conoscere la funzione: $y = f(x)$, e di sapere che questa è finita e continua per ogni valore di x compreso fra A e B .

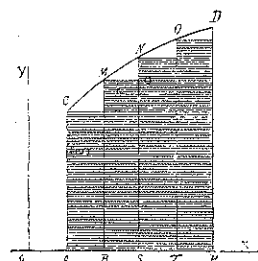


Fig. 51

Cenno dell'integrale definito e applicazioni.

49. — Nel caso della figura precedente l'area approssimata può esprimersi mediante la somma:

$$(x_1 - a) \cdot f(a) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) + \dots \\ + (b - x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1});$$

ove $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sono le ascisse dei punti: $R, S, \dots$ intermedi al segmento AB ; e l'area S del trapezio mistilineo $ACDB$ si può considerare come il limite verso cui tende quella somma, quando n cresce indefinitamente. E siccome ogni termine di essa si può pensare sotto la forma: $f(x) \cdot dx$, così si è convenuto di indicare il limite verso cui tende quella somma al crescere indefinitamente di n col simbolo seguente:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \quad (1)$$

e porre: $S = \int_a^b f(x) dx$, invece che:

$$S = \lim \{ (x_1 - a) f(a) + \dots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \}.$$

La espressione: (1) si chiama **integrale definito** della funzione $y = f(x)$ esteso all'intervallo (a, b) ; i numeri dati a e b si chiamano il *limite inferiore*, il *limite superiore* dell'integrale stesso, e si legge *integrale da a a b di $f(x) dx$* .

In altre parole, l'integrale definito della funzione: $y = f(x)$ fra i limiti a e b , rappresenta l'area del

trapezio mistilineo compreso fra l'arco di curva: $y = f(x)$, l'asse delle x , e le ordinate $f(a)$ ed $f(b)$.

Supponiamo ora che il limite superiore dell'integrale $\int$

sia *variabile*, invece che fisso, e poniamo $OB = x$, invece che b ; poniamo $BB' = \Delta x$ (fig. 52), e indichiamo con $S + \Delta S$ l'area $CAB'D'$. Se l'arco $\widehat{DD'}$ si potesse sostituire con la corda $\overline{DD'}$ si avrebbe che:

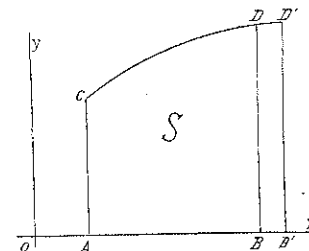


Fig. 52

$\Delta S = \frac{1}{2} (y + y + \Delta y) \Delta x = \Delta x (y + \frac{1}{2} \Delta y)$, e quindi:

$\frac{\Delta S}{\Delta x} = y + \frac{1}{2} \Delta y$. Questa supposizione possiamo farla nella maggior parte dei casi, se, come avviene nella nostra figura, al decrescere indefinitamente di Δx , decresce pure indefinitamente Δy . Ne consegue che allora al tendere di Δx verso zero: $\frac{dS}{dx} = y$. Pertanto possiamo dire che:

Se si considera come *variabile* il limite superiore x dell'integrale $S = \int_a^x y dx$, e questo integrale come *funzione* di x , la *derivata* dell'integrale rispetto al limite superiore x , è la *funzione* stessa y . Od anche:

Se si considera l'area $ACBD$ come *variabile*, al variare della ascissa $OB = x$, la *derivata* dell'area rispetto all'ascissa x è l'ordinata y corrispondente.

Quando il limite superiore di un integrale $\int$ invece che un numero fisso b è un numero variabile (che si dinota con x), allora si dice che quell'integrale invece che *definito* da a a b è un **integrale indefinito**; esso di-

notasi così: $\int_a^x y dx$, e spesso, più semplicemente così:

$$\int y dx.$$

Questo simbolo dinota così una tale funzione di x , che la sua derivata è eguale ad y . Anche la funzione: $\int y dx + C$, ove C dinota una costante, ha per derivata y , e ciò perchè la derivata di una costante è zero, dunque la funzione $\int y dx + C$ è la funzione più generale la cui derivata è y .

Si vede qui l'origine di due ordini di problemi: data la funzione y determinare la sua derivata $\frac{dy}{dx}$; data la funzione y determinare la funzione rappresentata dall'integrale $\int y dx + C$, la cui derivata sia eguale ad y . Così ad es. abbiamo visto che la derivata della funzione: ax^n è: nax^{n-1} (N. 38): ora possiamo aggiungere che la funzione che ha per derivata $n \cdot a \cdot x^{n-1}$, ossia che: l'integrale indefinito di: $n \cdot a \cdot x^{n-1}$ è la funzione: $ax^n + C$.

Poichè: $S = \int_a^b f(x) dx$ dinota l'integrale esteso da

a a b di $f(x)$, S dipenderà, oltre che dalla funzione $f(x)$ cioè dai suoi valori $f(x_1)$ $f(x_2)$... nei punti x_1 x_2 ... dell'intervallo (a, b) , anche dagli estremi di questo intervallo, principalmente da questi estremi. Se b è variabile, e questa variabile si dinota con x , allora si ha che:

$S(x) + C = \int_a^x f(x) dx$ (*). Ma per $x = a$ si ha manifestamente: $S(a) + C = 0$, mentre per $x = b$ si ha: $S(b) + C = \int_a^b f(x) dx$. Ne consegue, sottraendo, che:

$\int_a^b f(x) dx = S(b) - S(a)$ e quindi la regola seguente:

Dato da calcolarsi l'integrale definito, cioè l'area: $S = \int_a^b f(x) dx$ si cerchi se possibile, quella funzione $S(x)$, la cui derivata rispetto ad x sia: $y = f(x)$; trovata la $S(x)$ si calcolino i valori $S(b)$ $S(a)$; la differenza: $S(b) - S(a)$ sarà l'area domandata S , o, ciò che è lo stesso l'integrale definito: $\int_a^b f(x) dx$.

Eserc. 1 - Verificare con la derivazione che:

- 1) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
- 2) $\int (p x^2 + q x + r) dx = p \frac{x^3}{3} + q \frac{x^2}{2} + r x + C$

Es. 2 - Verificare con la derivazione che:

- 1) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

(*) Quando il limite superiore di un integrale è variabile e si dinota con x , sarà opportuno indicare con altra lettera la variabile da a ad x nell'intervallo (a, x) : in tal caso, a scanso di equivoci si può scrivere $S(x) + C = \int_a^x f(t) dt$, oppure, indicando con

z il limite superiore variabile, scrivere: $S(z) + C = \int_a^z f(x) dx$, ciò che è lo stesso.

$$2) \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$$

Es. 3 - Verificare analogamente che:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \sqrt{x} + C$$

Es. 4 - Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$1) \int_a^b x^m dx$$

$$2) \int_0^3 (2x^2 - 4x + 5) dx$$

$$3) \int_0^1 \sqrt{x} dx$$

$$4) \int_0^{8.9} \sqrt{x} dx$$

$$5) \int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Es. 5 - Verificare che:

$$1) \int_a^b x^m dx + \int_b^c x^m dx = \int_a^c x^m dx$$

$$2) \int_a^b x^m dx = - \int_b^a x^m dx$$

$$3) \int_0^3 (2x^2 - 4x + 5) dx = \int_0^1 (2x^2 - 4x + 5) dx +$$

$$\int_1^2 (2x^2 - 4x + 5) dx + \int_2^3 (2x^2 - 4x + 5) dx$$

Es. 6 - Verificare che:

$$\int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{2.3},$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{1.2}{3.4.5},$$

$$\int_0^1 x^3(1-x)^3 dx = \frac{1.2.3}{4.5.6.7}.$$

50. — Illustriamo l'argomento con un facile esempio: Proponiamoci cioè di calcolare l'area del segmento parabolico compreso fra la curva di equazione: $y = ax^2$, l'asse delle x e l'ordinata corrispondente all'ascissa b .

L'area che cerchiamo è $S = \int_0^b y dx = \int_0^b ax^2 dx$.

La funzione più generale, la cui derivata sia: ax^2 , è $\frac{ax^3}{3} + C = S(x)$. (n. 35 e 38). Qui abbiamo però che:

$S(b) = \frac{ab^3}{3} + C$, e: $S(0) = C$; pertanto: $\int_0^b y dx$, ossia:

$S = S(b) - S(0) = \frac{ab^3}{3} = ab^2 \cdot \frac{b}{3}$. D'altra parte: ab^2

è l'ordinata corrispondente all'ascissa b , (del punto B nella fig. 53) epperò l'area del segmento parabolico oAB è data da un terzo del rettangolo che ha per lati l'ordinata e l'ascissa dell'estremo B del segmento stesso, come abbiamo già trovato per altra via, meno breve (n. 48).

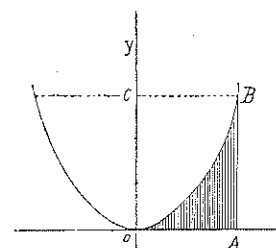


Fig. 53

Se si ha invece la funzione: $y = a + bx^2$, la quale rappresenta pure una parabola, la funzione:

$$S(x) = ax + \frac{b}{3} x^3 + C$$

è l'integrale indefinito di y , cioè quella funzione che ha per derivata la y . E l'espressione:

$$\int_e^d y dx = a d + \frac{b}{3} d^3 - a e - \frac{b}{3} e^3$$

è l'integrale definito tra e e d della y . Essa rappresenta quindi l'area del segmento parabolico limitato in basso dal tratto ($e d$) delle ascisse, a sinistra e a destra dalle ordinate corrispondenti alle ascisse e e d , e superiormente dall'arco di curva la cui equazione è appunto $y = a + b x^2$.

51. — Esercizi sugli integrali definiti.

Eserc. 1. — Lunghezza di un arco di curva piana.

Sia MN un arco di curva data, P un suo punto di coordinate xy , Q un altro punto prossimo a P , di coordinate: $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$. (fig. 54). Indichiamo con Δs la lunghezza dell'arco $\widehat{MP}$ di curva, a partire da M , i cui estremi P e Q siano vicinissimi, e tali che Δs si possa considerare come l'incremento di $\widehat{MP}$; e si supponga che quando Δx è sufficientemente piccolo, si possa ritenere che:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

vale a dire che il triangolo mistilineo di lati: Δx , Δy e Δs si possa considerare come rettangolo sostituendovi la corda all'arco Δs (ciò che avviene appunto nelle curve intuitive). Segue

dalla formola precedente che: $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$, e passando

al limite, se questo esiste, che: $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Adunque:

Per trovare la lunghezza dell'arco s compreso tra il punto di ascissa a e il punto di ascissa b basterà calcolare l'integrale defi-

$$\text{nito: } s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

E però da notare che la ricerca dell'integrale indefinito

$\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$, generalmente parlando, presenta difficoltà non lievi. Noi tratteremo qui alcuni casi speciali.

1) Se la curva è la retta: $y = mx$ passante per O e di pendenza m , allora si ha: $\frac{dy}{dx} = m$ e quindi:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + m^2} dx \text{ ed essendo:}$$

$$\int \sqrt{1 + m^2} dx = \sqrt{1 + m^2} \cdot x + C$$

si trova che: $S = \sqrt{1 + m^2} \cdot b - \sqrt{1 + m^2} \cdot a = \sqrt{1 + m^2} \cdot (b - a)$

Questo risultato si può verificare direttamente sulla figura, notando che qui s è un segmento rettilineo.

2) Se la curva $y = f(x)$ ha per pendenza: $\sqrt{m^2 x^2 - 1}$ e si domanda la lunghezza dell'arco compreso fra gli estremi di ascissa a e b si ha che: $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + m^2 x^2 - 1} = mx$, e perciò:

$$s = \int_a^b mx dx = \frac{m}{2} (b^2 - a^2).$$

Es. 2. — Formola dello spazio s nel moto uniformemente vario.

Se nel moto uniformemente vario si dinota con u la velocità iniziale, con f la forza acceleratrice o ritardatrice, (secondo che f è pos. o neg.) e t il tempo; se v è la velocità del mobile alla fine del tempo t , si ha che:

$$v = u + ft.$$

Siccome qui v è variabile insieme con t , e sappiamo che:

$\frac{ds}{dt} = v$, così sostituendo avremo: $\frac{ds}{dt} = u + ft$ e integrando:

$$s = ut + \frac{1}{2} f \cdot t^2 + C.$$

Se si suppone che per $t = 0$ sia $s = 0$, si avrà la nota formola.

$$s = ut + \frac{1}{2} f t^2.$$

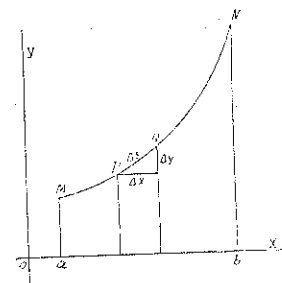


Fig. 54

Es. 3 — Centro di gravità di un segmento parabolico.

Dalla meccanica elementare è noto che se si moltiplica la misura m della massa di un punto materiale per la distanza x di esso da un dato piano π , e poi si sommano tutti i prodotti relativi alle singole particelle in cui un corpo di massa M può essere diviso, il risultato è eguale al prodotto di M per la distanza X del centro di gravità del corpo dal piano π . Cioè:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = X(m_1 + m_2 + \dots + m_n) = X \cdot M$$

Analogo risultato vale anche per una figura piana, e per una porzione di linea materiale.

Proponiamoci di determinare il centro di gravità di un segmento parabolico BOC . (fig. 53).

Sappiamo che:

$$OAB = \frac{2}{3} OA \cdot AB \quad (\text{n. 48}).$$

Per la simmetria della figura il centro di gravità si dovrà trovare sull'asse della x , se la parabola è di equazione: $y^2 = ax$.

L'area della lista $PEHL$ è: $2y \cdot dx$, se QS è infinitesimo, essendo y l'ordinata di P , cioè $y = \sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$.

Per trovare l'ascissa X del centro

di gravità, osservando che: $2OAB = \frac{1}{3} OA \cdot AB$ applicheremo la formola:

$$2OAB \cdot X = \frac{1}{3} OA \cdot AB \cdot X = \int_0^{OA} 2y \, dx \cdot x = 2 \int_0^{OA} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x \, dx.$$

E siccome:

$$\int a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{5} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} + C, \text{ così: } \int_0^{OA} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{5} a^{\frac{1}{2}} OA^{\frac{5}{2}}$$

e sostituendo: $\frac{1}{3} OA \cdot OB \cdot X = \frac{1}{5} \frac{AB}{OA^{\frac{1}{2}}} \cdot OA^{\frac{5}{2}}$ e infine:

$$\frac{1}{3} OA \cdot AB \cdot X = \frac{1}{5} AB \cdot OA^2, \text{ da cui: } X = \frac{3}{5} OA.$$

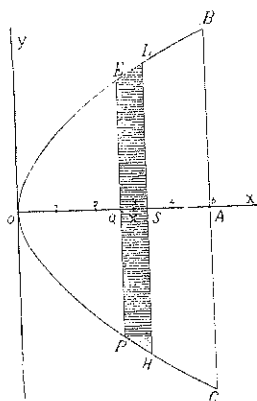


Fig. 53

Il centro di gravità del segmento parabolico BOC è il punto dell'asse delle x che dista dall'origine di $\frac{3}{5}$ del segmento OA (ascissa del punto B).

Es. 4 - Momento d'inerzia di un rettangolo materiale rispetto ad un asse.

Quando ciascuna particella di una massa si moltiplica per il quadrato della sua distanza da un asse, e poi si fa la somma di tutti i prodotti analoghi per tutti gli elementi in cui si è divisa la massa, si ottiene una espressione che si chiama nella meccanica il: *momento d'inerzia* dell'intera massa rispetto a quell'asse.

Proponiamoci di trovare il momento d'inerzia del rettangolo $ABDC$ rispetto alla sua mediana OX , che prendiamo come asse delle ascisse.

Posto: $AB = a$, $AC = b$, $OP = y$, $OS = y + \Delta y$, l'area della particella $PSRQ$ è data da: $a \Delta y$ e quindi il momento I d'inerzia domandato è

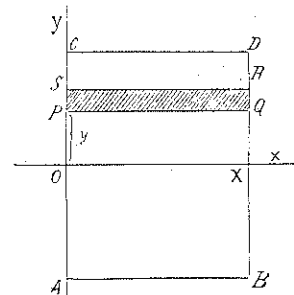


Fig. 56

dato da: $I = \int_{-\frac{1}{2}b}^{+\frac{1}{2}b} a \cdot dy \cdot y^2$ e siccome: $\int a y^2 \, dy = \frac{a y^3}{3} + C$, così

$$\text{avremo: } I = \frac{a b^3}{3 \cdot 8} - \left(-\frac{a b^3}{3 \cdot 8} \right) = \frac{a b^3}{12}$$

Altri Esercizi.

Eser. 1 - Se $y = f(x)$ è l'equazione di una curva, il volume V generato dalla rotazione intorno all'asse delle x del trapezio

mistilineo $ACDB$ della fig. 51 è dato dalla formola $V = \int_b^a \pi y^2 \, dx$,

ovè a e b sono le ascisse dei punti A e B e π è il rapporto fra la circonferenza e il diametro.

Es. 2 - Applicare la formola precedente al caso che sia: $y = rx$, e siano $a = 0$, $b = h$; e interpretare il risultato ottenuto (volume del cono).

Es. 3 - Applicare la stessa formola al caso che sia: $y = mx + n$, e siano $a = r$ $b = R$; e interpretare il risultato ottenuto (volume del tronco).

Es. 4 - Applicare la stessa formola al caso che sia: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e siano: $a = 0$ $b = r$; e interpretare il risultato (volume della sfera).

Es. 5 - Applicare la stessa formola al caso che sia: $y = x^2$ supponendo $a = 0$ $b = p$ e interpretare il risultato.

Es. 6 - Lo stesso pel caso che sia: $y = \frac{1}{x}$ e si assumano a e b diversi da zero (ad es. $a = 3$ $b = 5$) e interpretare il risultato ottenuto.

Es. 7 - Se $y = f(x)$ è l'equazione di una curva, la superficie S generata dalla rotazione intorno all'asse delle x dell'arco AB della fig. 51 è data da: $S = \int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$, ove a e b sono le

ascisse dei punti A e B e: $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. (La superficie ΔS generata dalla rotazione dell'arco ΔS è compresa fra $2\pi y \Delta S$ e $2\pi (y + \Delta y) \Delta S$; procedendo al limite si trova che $\frac{dS}{ds} = 2\pi y$ e quindi che: $\frac{dS}{dx} = 2\pi y \frac{ds}{dx}$, da cui ecc.)

Es. 8 - Applicare la stessa formola al caso che sia $y = mx$, e siano $a = 0$ $b = h$, e interpretare il risultato ottenuto (sup. lat. del cono).

Es. 9 - Lo stesso pel caso che sia: $y = mx + n$ e siano $a = r$ $b = R$ (sup. lat. del tronco).

Es. 10 - Lo stesso pel caso che sia: $y^2 = r^2 - x^2$ e quindi: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $\frac{ds}{dx} = \frac{a}{y}$, assumendo $a = 0$ $b = r$: (superficie dell'emisfera).

Curva dei seni e delle tangenti.

52. — Sia data la funzione $y = \sin x$, e si voglia tracciare il suo diagramma. A tal uopo rappresentiamo x

con un arco OA del circolo di centro C e raggio 1; in tal caso: $\sin x$ è rappresentato dalla misura di AD . Portando sulla retta CO un segmento Ox eguale all'arco x e ponendo: $xP = AD = \sin x$ e così facendo per tutti i punti del circolo dato, si ha un insieme di punti $PQ...$ i quali costituiscono una curva (fig. 57), detta **curva dei seni**, o **sinusoide**.

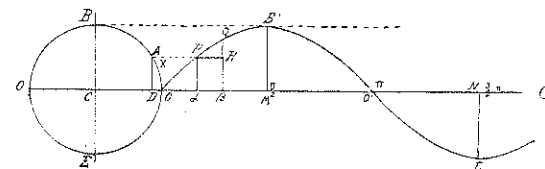


Fig. 57

Si tratta di una curva che ha i caratteri delle curve intuitive. Anzitutto la funzione: $y = \sin x$ è continua, perchè quando Δx tende a zero, tende pure a zero Δy ; e inoltre in ogni punto P essa ha una tangente, la cui pendenza è la derivata $\frac{dy}{dx} = \cos x$, la quale è pure funzione continua.

Si vede dalla figura che al punto B corrisponde nella sinusoide il punto B' ove la funzione $\sin x$ ha un massimo cioè 1, e al punto O , corrisponde il punto O' di ascissa π dove la funzione ha per valore lo zero; al punto E corrisponde E' , ove la funzione ha un minimo, cioè: -1 ; ecc. La curva si compone anzitutto di due rami corrispondenti alle semi circonferenze OBO , e O, EO situati l'uno sopra l'altro sotto la retta CO , in modo che la parte $O'B'$ è simmetrica di OB' rispetto alla ordinata $B'M$ e i due $OB'O'$, $O'E'O''$ sono fra loro eguali.

La curva si compone di infiniti di questi rami perchè percorrendo una seconda volta la circonferenza da O nel verso OAB si riproduce il ramo $OB'O'O''$; e così di seguito; questi rami corrispondono al periodo π della

funzione $\sin x$, nel senso cioè che: $\sin x = \sin(x + \pi) = \sin(x + 2\pi) = \dots$

Se si considera invece la funzione: $y = \tan x$, e si prendono come precedentemente i valori dell'arco x come ascisse e come ordinate quelli corrispondenti a $\tan x$, si ottiene il diagramma cercato: esso è una curva che si

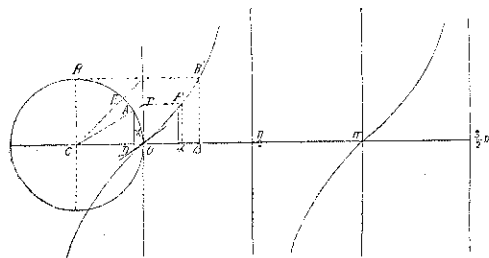


Fig. 58

chiama **curva delle tangenti** (fig. 58). Che anche questa sia una curva intuitiva si deduce dal fatto che la y è una funzione continua (salvo casi speciali) in ogni suo punto poichè quando x riceve l'incremento Δx , infinitamente piccolo, anche Δy è infinitamente piccolo: inoltre in ogni punto (salvo casi speciali) esiste la derivata $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ che è la pendenza della retta tangente

alla curva, e che è pure pure continua. Dal n. 33 si ha che il limite del rapporto dell'arco alla tangente è eguale ad 1 quindi in un punto infinitamente vicino ad O la tangente alla curva è poco discosta dalla bisettrice dell'angolo formato dall'ordinata OT e dall'asse delle ascisse che è quasi retto, e nell'origine è quindi la bisettrice stessa.

Si vede che la curva si compone di infiniti rami eguali, che corrispondono ai periodi $\pi, 2\pi \dots$ della funzione $\tan x$. Poichè $\tan \frac{\pi}{2} = \pm \infty$ ciò significa che la retta perpendicolare all'asse OX passante pel punto di

ascissa $\frac{\pi}{2}$ è tangente alla curva in un punto a distanza infinita, o, come si suol dire, è un *assintoto* della curva, cioè: il ramo di curva in prossimità del punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$ si accosta indefinitamente a questo assintoto: lo stesso dicasi pei punti di ascisse $3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \dots$

Siccome si ha che $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, così il punto B' della curva che corrisponde al punto E del circolo il cui arco OE è $\frac{\pi}{4}$, ha per ordinata 1.

Curva logaritmica.

53. — Se si considera l'equazione esponenziale: $x = a^y$ dove x dinota un numero reale e positivo e a pure un numero reale maggiore di 1, si ha che y è

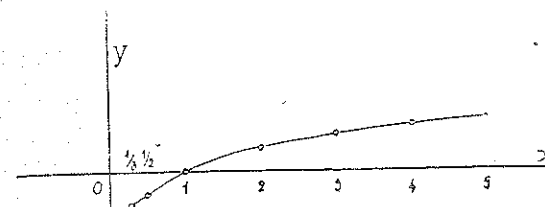


Fig. 59

il logaritmo di x nella base a , cioè $y = \log_a x$. Pro-

poniamoci di costruire il diagramma corrispondente alla equazione: $x = a^y$ o della: $y = \log_a x$, assumendo i valori di x come ascisse e y come ordinate; e sia $a = 10$.

Si ha: $\log 1 = 0$ $\log 2 = 0,30 \dots$ $\log 3 = 0,48 \dots$
 $\log 4 = 0,60 \dots$ $\log 5 = 0,70 \dots$ $\log \frac{1}{2} = -0,30 \dots$

$\log \frac{1}{3} = 0,48 \dots$ $\log \frac{1}{4} = 0,60 \dots$

Si potrebbe dimostrare (ma questo eccederebbe i limiti di questi Complementi, e noi ci limitiamo solo ad accennare) che: $y = \log_{10} x$ è una funzione continua, la quale ammette (salvo punti speciali) la derivata essa pure continua; il diagramma della funzione $y = \log x$ è in tal caso una curva (fig. 59) nel senso da noi considerato che si chiama **curva logaritmica**.

INDICE

Prefazione	Pag. iii
Coordinate di un punto sulla retta	» 1
Coordinate cartesiane di un punto nel piano	» 6
Diagrammi	» 11
Grandezze variabili e funzioni	» 20
Funzioni lineari	» 28
Rapporto incrementale	» 35
Sistema di due equazioni lineari a due incognite	» 39
Funzioni quadratiche	» 41
Funzione $\frac{a}{x}$	» 48
Coordinate cartesiane ortogonali di un punto nello spazio	» 54
Concetto di limite e sue applicazioni geometriche	» 56
Retta tangente ad una curva	» 65
Limite del rapporto fra un arco di circolo e la sua corda	» 68
Derivata di una funzione	» 69
Derivata di una funzione di 1° e 2° grado, di $a:x$ e di una funzione di grado n	» 71
Derivata di $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$	» 76
Interpretazioni geometriche e meccaniche della derivata	» 78
Valutazione approssimata di un'area piana	» 81
Misura esatta di un'area piana	» 86
Cenno dell'integrale definito e applicazioni	» 88
Curva dei seni e curva delle tangenti	» 98
Curva logaritmica	» 101